

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## К РАСЧЕТУ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК В ПРОЦЕССАХ ПЕРЕМЕННОГО НАГРУЖЕНИЯ С УЧЕТОМ ВТОРИЧНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ И ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

**Введение.** Численному исследованию упругопластического осесимметричного напряженно-деформированного состояния (НДС) тонких оболочек посвящено много работ [1-3 и др.], в большинстве которых учитывается разгрузка по упругому закону. В некоторых работах [4] учитывается возможность появления вторичных пластических деформаций. В ряде исследований [5 и др.] упругопластическое НДС оболочки определяется с учетом вида напряженного состояния (ВНС) и упругой разгрузки. Работы, в которых приводится методика решения осесимметричной задачи пластичности с учетом вторичных пластических деформаций и ВНС, в настоящее время отсутствуют. В данной статье описан алгоритм определения упругопластического НДС тонкой оболочки в процессе знакопеременного нагружения с учетом вторичных пластических деформаций и ВНС.

**Постановка задачи и основные соотношения.** Рассмотрим оболочку вращения, первоначально находящуюся в ненапряженном и недеформированном состоянии при температуре  $T = T_0 = 20^0 C$ , а затем подвергнутую действию возрастающего равномерного внутреннего давления при этой же температуре. Предполагается, что оболочка изготовлена из изотропного материала, а меридиан оболочки может состоять из конечного числа звеньев разной геометрии. Оболочка отнесена к криволинейной ортогональной системе координат  $s, \theta, \zeta$ , связанной с недеформированной непрерывной координатной поверхностью;  $s$  ( $s_a \leq s \leq s_b$ ) – меридиональная координата,  $s_a, s_b$  – координаты, соответствующие торцам оболочки;  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) – окружная координата;  $\zeta$  ( $\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_k$ ) – координата, отсчитываемая по нормали к координатной поверхности,  $\zeta_0$  соответствует внутренней поверхности оболочки, а  $\zeta_k$  – наружной ее поверхности; толщина оболочки  $h = \zeta_k - \zeta_0$ . В качестве координатной поверхности выбирается срединная либо одна из поверхностей оболочки. Предполагается, что в процессе нагружения материал оболочки деформируется в пределах и за пределами упругости; в возникших областях пластических деформаций может происходить разгрузка с возможным появлением вторичных пластических деформаций, после чего возможно повторное нагружение. В области вторичных пластических деформаций предполагается, что уменьшение предела текучести материала равно его увеличению в момент разгрузки при первоначальном нагружении. Деформации ползучести предполагаются пренебрежимо малыми по сравнению с упругими и пластическими составляющими. Задачу решаем в квазистатической постановке с использованием гипотез Кирхгофа-Лява и соотношений геометрически линейной теории оболочек [6].

Для описания деформирования материалов будем использовать вариант соотношений теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны с учетом ВНС [7, 8], линеаризованных методом дополнительных напряжений. В этих уравнениях связь между первыми инвариантами тензоров напряжений  $\sigma_0$  и деформаций  $\varepsilon_0$  принята в традиционном линейном виде

$$\sigma_0 = K\varepsilon_0,$$

где  $\sigma_0 = (\sigma_{ss} + \sigma_{\theta\theta})/3$ ,  $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\zeta\zeta})/3$ ,  $\sigma_{ss}, \sigma_{\theta\theta}$  – компоненты тензора напряжений,  $\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{\zeta\zeta}$  – компоненты тензора деформаций,  $K = E/(1-2\nu)$  – модуль объемного расширения,  $E$  – модуль упругости материала. Входящая в определяющие уравнения [7, 8] нелинейная связь между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций предполагается зависящей от ВНС. В качестве параметра ВНС используется угол ВНС [9], который вычисляется через второй и третий инварианты девиатора напряжений. Под углом ВНС подразумевается угол  $\omega_\sigma$ , определяющий ориентацию октаэдрического касательного напряжения в октаэдрической плоскости относительно отрицательного направления проекции на эту плоскость главной оси, вдоль которой действует минимальное главное напряжение. Для конкретизации этой связи при активных процессах используются результаты опытов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов при различных значениях угла ВНС со скоростями, при которых не возникают деформации ползучести. Задачу о НДС оболочки будем решать методом последовательных приближений.

Для решения задачи процесс нагружения разбиваем на ряд малых этапов во времени таким образом, чтобы моменты времени, разграничивающие этапы, как можно лучше совпадали с моментами начала возможной разгрузки, повторного нагружения и перемены знака первого инварианта тензора напряжений. На каждом этапе используем дифференциальные уравнения равновесия [6] элемента осесимметрично нагруженной оболочки вращения при отсутствии кручения, геометрические соотношения [6] и физические уравнения [7, 8]. Последние представим в произвольной точке оболочки в форме закона Гука с дополнительными напряжениями

$$\begin{aligned}\sigma_{ss} &= A_{11}\varepsilon_{ss} + A_{12}\varepsilon_{\theta\theta} - A_1, \\ \sigma_{\theta\theta} &= A_{12}\varepsilon_{ss} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta} - A_2,\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$A_{11} = A_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad A_{12} = \nu A_{11}; \quad A_1 = A_{11}\left(e_{ss}^{(p)} + \nu e_{\theta\theta}^{(p)}\right), \quad A_2 = A_{11}\left(e_{\theta\theta}^{(p)} + \nu e_{ss}^{(p)}\right). \quad (2)$$

В (1)  $E, \nu$  – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала,  $e_{ss}^{(p)} = \varepsilon_{ss}^{(p)}$ ,  $e_{\theta\theta}^{(p)} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)}$ ,  $\varepsilon_{\zeta\zeta}^{(p)} = -(\varepsilon_{ss}^{(p)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)})$  – пластические составляющие компонент деформации, вычисляемые как сумма приращений этих компонент

$$\varepsilon_{ss}^{(p)} = \sum_{m=1}^M \Delta_m \varepsilon_{ss}^{(p)}, \quad \Delta_m \varepsilon_{ss}^{(p)} = \langle c_{ss} \rangle_m \Delta_m \Gamma_p, \quad \langle c_{ss} \rangle_m = \left\langle \frac{2\sigma_{ss} - \sigma_{\theta\theta}}{S} \right\rangle_m (s, \theta), \quad (3)$$

где угловые скобки означают средние на этапе значения заключенных в них величин,  $S$  – интенсивность касательных напряжений,

$$S = \left[ \frac{1}{3} \left( \sigma_{ss}^2 - \sigma_{ss} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

$\Gamma_p$  – интенсивность накопленной пластической деформации сдвига,

$$\Gamma_p = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma_p + \Delta_M \Gamma_p. \quad (5)$$

Для определения  $\Delta_M \Gamma_p$  используется предположение, что между  $S$ ,  $\Gamma$  и углом ВНС  $\omega_\sigma$  существует зависимость, которая при первоначальном нагружении имеет вид

$$S = \Phi(\Gamma, \omega_\sigma), \quad (6)$$

где

$$\omega_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \left[ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3(D_\sigma)}{S^3} \right] \quad \left( 0 \leq \omega_\sigma \leq \frac{\pi}{3} \right); \quad (7)$$

$I_3(D_\sigma) = |s_{ij}|$  – третий инвариант девиатора напряжений  $D_\sigma$ ,

$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений.

Для конкретизации зависимости (6) по результатам экспериментов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов строятся зависимости  $S(\Gamma)$  для нескольких постоянных значений угла  $0 \leq \omega_\sigma \leq \pi/3$ ; для промежуточных значений этого угла зависимости  $S(\Gamma)$  находятся путем линейной интерполяции. Принимается предположение, что  $\Gamma = \frac{S}{2G} + \Gamma_p$ ,  $G = E/2(1+\nu)$  – модуль сдвига материала. Предполагается, что при упругой разгрузке  $\Gamma = \frac{S}{2G} + \Gamma_p^{(1)}$ , где  $\Gamma_p^{(1)}$  – интенсивность накопленной пластической деформации сдвига в момент разгрузки. В том случае, когда разгрузка сопровождается вторичными пластическими деформациями, используется зависимость

$$S = \Phi_1\left(\Gamma, \Gamma_p^{(1)}, \omega_\sigma\right). \quad (8)$$

Зависимость (8) строим, используя (6), величину  $\Gamma_p^{(1)}$  и соответствующее значение  $S^{(1)}$  в момент разгрузки. При повторном нагружении используется зависимость

$$S = \Phi_2\left(\Gamma, \Gamma_p^{(2)}, \omega_\sigma\right). \quad (9)$$

Зависимость (9) строим, используя (6), величину интенсивности накопленной вторичной пластической деформации  $\Gamma_p^{(2)}$  и соответствующее значение  $S^{(2)}$  в момент повторного нагружения. При построении зависимостей (8) и (9) предполагаем, что

$$S^{(1)} + S_T^{(2)} = S^{(2)} + S_T^{(3)} = 2S_T^{(1)}, \quad (10)$$

где  $S_T^{(1)}, S_T^{(2)}, S_T^{(3)}$  – значения интенсивности касательных напряжений, соответствующих пределам текучести материала в зависимостях (6), (8), (9). Один из способов построения зависимостей (8), (9) без учета ВНС описан в [10].

С использованием (6), (8), (9) приращение  $\Delta_M \Gamma_p$  за текущий этап нагружения определяется в процессе последовательных приближений.

Соотношения (1) используем для нахождения связи между усилиями  $N_s, N_\theta$ , моментами  $M_s, M_\theta$  и деформациями и изменениями кривизны  $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \kappa_s, \kappa_\theta$  координатной поверхности оболочки. Полученные соотношения вместе с уравнениями равновесия и геометрическими соотношениями образуют систему 12 уравнений, которую приводим к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений относительно

неизвестных функций  $N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s$ , где  $Q_s$  – перерезывающее усилие,  $u, w$  – перемещения точек координатной поверхности в меридиональном и нормальном направлениях,  $\vartheta_s$  – угол поворота нормали к координатной поверхности. Эта система имеет вид

$$\frac{d\bar{Y}}{ds} = P(s)\bar{Y} + \bar{f}(s) \quad (11)$$

при граничных условиях

$$B_1\bar{Y}(s_a) = \bar{b}_1, \quad B_2\bar{Y}(s_b) = \bar{b}_2, \quad (12)$$

где  $\bar{Y}$  – вектор-столбец разрешающих функций,  $\bar{Y} = \{N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s\}$ ,  $P(s)$  – матрица системы,  $\bar{f}(s)$  – вектор-столбец дополнительных слагаемых,  $B_1, B_2$  – заданные матрицы,  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  – заданные векторы-столбцы граничных условий. Элементы матрицы  $P(s)$  и вектора  $\bar{f}(s)$  вычисляются по формулам [3]. Из этих формул следует, что элементы матрицы  $P(s)$  зависят от геометрии оболочки и упругих свойств материала, а компоненты вектора  $\bar{f}(s)$  – еще и от внешних нагрузок и пластических деформаций, которые необходимо уточнять в процессе последовательных приближений.

Приведенные соотношения позволяют определить НДС оболочки с учетом ВНС на произвольном этапе нагружения. Эти же соотношения применяются для определения НДС оболочки и в том случае, когда ВНС не учитывается. В этом случае зависимость (6) не зависит от ВНС и конкретизируется по результатам экспериментов на простое растяжение образцов, а построенные с использованием (6) зависимости (8), (9) тоже не зависят от ВНС.

Для проведения вычислений необходимо задать геометрию оболочки, условия закрепления и нагружения, а также свойства ее материала. Последние задаются в виде зависимости (6) и коэффициента Пуассона. Разбиение на этапы удобно выполнить таким образом, чтобы на первом этапе оболочка деформировалась упруго.

В первом приближении на первом этапе нагружения в (2) полагаем  $A_1 = A_2 = 0$ . После вычисления элементов матрицы  $P(s)$  и компонент вектора-столбца  $\bar{f}(s)$  решаем краевую задачу (11),(12) путем сведения к задачам Коши, для решения которых используем метод Рунге-Кутты с дискретной ортогонализацией [11]. Получив в результате решения краевой задачи разрешающие функции, находим компоненты деформаций, а по ним – компоненты напряжений (1) и угол  $\omega_\sigma$  (7). Далее вычисляем интенсивность касательных напряжений (4) и находим

$$\Delta_{M\Gamma p} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta_{M\varepsilon}^{(p)}, \quad \Delta_{M\varepsilon}^{(p)} = \sum_{i=1}^{L-1} \Delta_{Mi\varepsilon}^{(p)} + \Delta_{ML\varepsilon}^{(p)},$$

$$\Delta_{ML\varepsilon}^{(p)} = \frac{S\sqrt{3} - \sigma^{(d)}}{E}, \quad (13)$$

где  $L$  – номер текущего приближения на  $M$  – м этапе. Значение  $S$  вычисляется по формуле (4), а  $\sigma^{(d)}$  определяется из зависимостей (6), (8) и (9) соответственно при первоначальном нагружении, в области вторичных пластических деформаций и при вторном нагружении. Процесс последовательных приближений на этапе завершается при выполнении условия

$$\left| \Delta_{ML\varepsilon}^{(p)} \right| \leq \delta, \quad (14)$$

где  $\delta$  – наперед заданное число. В процессе последовательных приближений выполняется проверка условий, позволяющих определить, по которой из зависимостей (6), (8), (9) на данном этапе нагружения необходимо вычислять приращение  $\Delta_M \Gamma_p$ . На начальных этапах процесса нагружения используется зависимость (6). В том случае, когда  $\Gamma_p > 0$  и найденное в первом приближении приращение интенсивности пластических деформаций (13) в элементе отрицательно, это означает, что в данном элементе происходит разгрузка, и соответствующее приращение пластических деформаций на данном этапе считается равным нулю. При равенстве нулю приращения пластических деформаций и перемене знака первого инварианта тензора напряжений необходимо использовать зависимость (8). Аналогичным образом осуществляется и переход к использованию зависимости (9).

**Результаты решения задачи.** Описанный алгоритм реализован с помощью программного комплекса. Решена тестовая задача. Выполнен расчет однородного НДС тонкой цилиндрической оболочки, подвергнутой действию растягивающего усилия за пределом упругости, затем после снятия нагрузки последовало сжатие, сопровождающееся изменением пластических деформаций, далее была снята сжимающая нагрузка и приложено растягивающее усилие, а затем оболочка была полностью разгружена. Задача пластичности решалась с точностью  $\delta = 0.00001$ . Эта задача была также решена без применения процесса последовательных приближений, и результаты совпали с заданной точностью. Зависимость  $S \sim \Gamma$  в этом процессе изображена на рис.1.

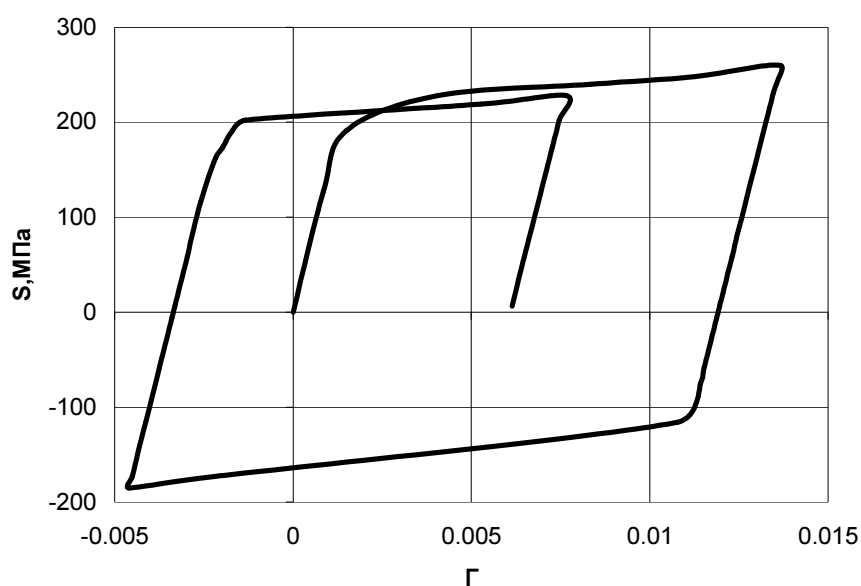


Рисунок 1

**Выводы.** Разработан алгоритм численного исследования упругопластического осесимметричного НДС тонких оболочек в процессах деформирования по траекториям малой кривизны с учетом ВНС и вторичных пластических деформаций. Эффективность алгоритма апробирована на тестовом примере.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шевченко Ю.Н. Теория упругопластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. В 5 т. Т.3. / Шевченко Ю.Н., Прохоренко И.В. – К.: Наукова думка, 1981. – 296с.
2. Шевченко Ю.Н. Механика связанных полей в элементах конструкций / Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. – Т.2. Термовязкопластичность. – К.: Наукова думка, 1987. – 264с.

3. Шевченко Ю.Н. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. – К.: Наукова думка, 1992. – 328с.
4. Шевченко Ю.Н. Методика решения осесимметричной задачи термовязкопластичности для тонких слоистых оболочек ЕС ЭВМ / Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Прохоренко И.В. – К.: Наукова думка, 1981. – 68с.
5. Babeshko M.E. Describing the Thermoelastoplastic Deformation of Compound Shells under Axisymmetric Loading with Allowance for the Third Invariant of Stress Deviator / Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N. // Int. Appl. Mech. – 2010. – № 12. – P.1362-1371.
6. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек / Новожилов В.В. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432с.
7. Shevchenko Yu.N. Constitutive Equations for Describing the Elastoplastic Deformation of Elements of a Body along Small-Curvature Paths in View of the Stress Mode / Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N. // Int. Appl. Mech. – 2006. – № 4 (46). – P.421-430.
8. Бабешко М.Е. О приближенном описании процессов неупругого деформирования изотропного материала с учетом вида напряженного состояния / Бабешко М.Е., Шевченко Ю.Н., Тормахов Н.Н. // Прикладная механика. – 2010. – № 2 (46). – С.24-34.
9. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 324 с.
10. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях / Шевченко Ю.Н. – К.: Наукова думка, 1970. – 288с.
11. Григоренко Я.М. Теория оболочек переменной жесткости / Григоренко Я.М., Василенко А.Т. – К.: Наукова думка, 1981. – 544с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.4).

Поступила в редколлегию 03.04.2014.

УДК 539.374

САВЧЕНКО В.Г., д.т.н., гол.наук.співроб.

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

### ТЕРМОВ'ЯЗКОПЛАСТИЧНИЙ СТАН ТІЛ ОБЕРТАННЯ ПРИ НЕОСЕСИМЕТРИЧНОМУ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ПОШКОДЖЕННЯ МАТЕРІАЛУ ПРИ ПОВЗУЧОСТІ

**Вступ.** Дане дослідження присвячене розрахунку термов'язкопружнопластичного просторового напружено-деформованого стану та міцності з врахуванням пошкодження матеріалу в осесиметричних елементах енергетичних установок при неосесиметричному навантаженні.

**Постановка задачі. Основні співвідношення.** Розглянемо в циліндричній системі координат  $z, r, \varphi$  нерівномірно нагріте тіло обертання, яке складається із не пружних ізотропних матеріалів, навантажене об'ємними  $\vec{K}(K_z, K_r, K_\varphi)$  і поверхневими  $\vec{t}_n(t_{nz}, t_{nr}, t_{n\varphi})$  силами. Навантаження таке, що в елементах тіла можуть виникати як пружні та пластичні деформації, так і деформації повзучості. Механічні характеристики матеріалів тіла залежать від температури. Навантаження і нагрівання тіла проходить таким чином, що в його елементах реалізуються процеси деформування по траєкторіях малої кривизни, які супроводжуються областями розвантаження.

Для врахування історії деформування увесь процес навантаження і нагрівання