УДК 539.3

СЕМЕНЮК Н.П., д.т.н., профессор
ЖУКОВА Н.Б., к.физ.-мат.н., ст.науч.сотр.
ИВАНОВА Н.И., к.физ.-мат.н., науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК ИЗ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ НЕСОВПАДЕНИИ НАПРАВЛЕНИЙ АРМИРОВАНИЯ С ОСЯМИ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Введение. В настоящей работе разрабатывается инкрементальный подход к решению задачи о нелинейном деформировании оболочек, включая докритический этап, потерю устойчивости и закритическое поведение. В основу предлагаемого подхода положены нелинейные зависимости между деформациями и перемещениями, которые применимы при больших углах поворота. Они получены из соотношений нелинейной теории упругости, взятых в форме Новожилова [1], при использовании кинематической гипотезы Тимошенко-Миндлина. Уравнения равновесия записываются в проекциях на направления осей до деформации. Их отличительной особенностью является то, что они содержат проекции усилий и моментов, обусловленных нелинейностью кривизн и кручения k_{ij}, а также деформаций ε_{i3}. Выводится разрешающая система дифференциальных уравнений относительно скоростей разрешающих функций, представленная в операторной форме Коши [2]. Для решения краевой задачи относительно скоростей используется метод дискретной ортогонализации при равноправии искомых функций и нагрузки [3, 4]. Система дифференциальных уравнений дополняется условием нормировки, позволяющим находить решение в регулярных и предельных точках на кривой равновесных состояний. Изложенная процедура использована при решении задачи об устойчивости и закритическом поведении сферической анизотропной оболочки при внешнем давлении.

Уравнения теории оболочек Тимошенко-Миндлина. При формулировке указанных уравнений будем использовать определяющие уравнения в линеаризованном виде относительно приращений перемещений, деформаций и напряжений, возникающих в теле при бесконечно малых приращениях внешних воздействий. Если скорость изменения нагрузок мала, то реализуется квазистатический процесс. Параметром, по отношению к которому определяется скорость изменения разрешающих функций, будем считать длину дуги, которую описывает изображающая точка в пространстве равновесных состояний.

Полагаем, что оболочка отнесена к ортогональной системе координат $\alpha_1,\ \alpha_2$, совпадающей с главными линиями кривизны поверхности приведения и образующей правую тройку с осью z, перпендикулярной к этой поверхности и направленной к центру кривизны. Коэффициенты Ляме $A_1,\ A_2$ и радиусы кривизны поверхности в направлении координатных линий $R_1,\ R_2$ связаны известными соотношениями Гаусса-Кодацци. Согласно принятой кинематической гипотезе перемещения по координате z изменяются линейно:

$$u = u_0 + z\theta, \qquad v = v_0 + z\psi, \qquad w = w_0 + z\chi, \tag{1}$$

где $u_0,\ v_0,\ w_0$ – перемещения координатной поверхности, $\theta,\ \psi,\ 1+\chi$ – отождествляются при малых деформациях с направляющими косинусами прямолинейного волокна, которое до деформации было нормальным к поверхности приведения [1]. В связи с этим между функциями $\theta,\ \psi,\ \chi$ выполняется соотношение

$$\theta + \psi + (1+\chi)^2 = 1. \qquad (2)$$

Такое же равенство получим, если примем условие нерастяжимости нормального элемента. Из равенства (2) находим

$$\chi = \sqrt{1-\theta^2-\psi^2} - 1. \qquad (3)$$

Использование этого выражения без каких-либо упрощений позволяет получить формулы для деформаций поперечного сдвига ε_{i3} и приращений кривизн и кручения k_{ij}, применимые в случае сильного изгиба оболочки. В теории оболочек Кирхгофа-Лява на этом пути возникают дополнительные трудности, если следовать подходу, предложенному в работе [1]. Прежде, чем записать эти формулы, введем обозначения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + a_1 v - \frac{w}{R_1}, \qquad \omega_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - au,$$

$$\theta_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_1}, \quad k_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha_1}, \quad t_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1}, \quad a_1 = \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_{21}}. \qquad (4)$$

Будут использоваться также аналогичные величины с индексом «2». Они получаются из приведенных путем замены 1→2, $u \leftrightarrow v,\quad \theta \leftrightarrow \psi$. Приняв во внимание выражения (4), представим нелинейные выражения деформаций ε_{ij}, приращений кривизн и кручения k_{ij} в таком виде

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1{}^2 + \omega_1{}^2 + \theta_1{}^2\right), \qquad \varepsilon_{13} = (1+\varepsilon_1)\theta + \theta_1 S_q + \psi\omega_1,$$

$$k_{11} = (1+\alpha_{11})\kappa_1 + \alpha_{12}t_1 + a_1\alpha_{13} + \frac{1}{R_1}\alpha_{14},$$

$$(1 \to 2, \quad \theta \leftrightarrow \psi)$$

$$k_{12} = (1+\alpha_{11})t_2 + (1+\alpha_{22})t_1 + \alpha_{12}k_2 + \alpha_{21}k_1 - a_2\alpha_{13} - a_1\alpha_{23}, \qquad (5)$$

$$\varepsilon_{12} = \omega_1(1+\varepsilon_1) + \omega_2(1+\varepsilon_2) + \theta_1\theta_2,$$

где

$$\alpha_{11} = \varepsilon_1 - \frac{1}{S_q}\theta_1\theta, \qquad \alpha_{12} = \omega_1 - \frac{1}{S_q}\theta_1\psi, \qquad \alpha_{13} = (1+\varepsilon_1)\psi - \omega_1\theta,$$

$$\alpha_{14} = 1 + 2\varepsilon_{11} - (1+\varepsilon_1)S_q + \theta\theta_1,$$

$$(1 \to 2, \quad \theta \leftrightarrow \psi) \qquad (6)$$

$$\alpha_{25} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\varepsilon_{12} + \frac{1}{R_1}\theta_2(\theta+\theta_1) + \frac{1}{R_2}\theta_1(\psi+\theta_2) - \left(\frac{\omega_2}{R_1} + \frac{\omega_1}{R_2}\right)S_q,$$

$$S_q = \sqrt{1-\theta^2-\psi^2}.$$

Для сокращения записи ниже будем использовать векторно-матричные операции. Введем векторы-столбцы $\varepsilon = (\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{13},\ k_{11},\ \varepsilon_{12},\ \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23},\ k_{12},\ k_{22})^T$,

$$\varepsilon_l = (\varepsilon_1,\ \omega_1,\ \theta_1,\ k_1,\ t_1,\ \varepsilon_2,\ \omega_2,\ \theta_2,\ k_2,\ t_2,\ \theta,\ \psi)^T .$$

Производные от компонентов вектора ε выражаются через производные от компонентов вектора ε_l следующим образом:

$$\dot{\varepsilon} = M_c \dot{\varepsilon}_l . \tag{7}$$

Матрица M_c состоит из 8 строк и 12 столбцов:

$$M_c = (c_{ij}), \quad i = 1,\dots,8, \qquad j = 1,\dots,12. \tag{8}$$

Выражений для коэффициентов c_{ij} не приводим, так как их легко получить, дифференцируя формулы (5).

Полагаем, что тангенциальные деформации изменяются по толщине линейно

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij,0} + zk_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \tag{9}$$

а деформации поперечного сдвига $\varepsilon_{13},\ \varepsilon_{23}$ от координаты z не зависят. Аналогичное представление имеют производные $\dot{\varepsilon}_{ij}$.

Чтобы получить зависимости между скоростями деформаций и усилий, моментов теории оболочек воспользуемся соотношениями упругости анизотропного тела

$$\dot{\varepsilon} = A_p \dot{\sigma}, \tag{10}$$

где A_p – матрица коэффициентов податливости анизотропного тела, вектор-столбец $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12})$, ($\varepsilon_{ij}$ – удвоенные тензорные $i \neq j$) и вектор $\sigma = \ = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$. При этом учтено, что $\varepsilon_{33} = 0$, а $\dot{\sigma}_{33}$ выражаются через $\dot{\sigma}_{ij}$. Вычисляя моменты нулевого и первого порядка от компонентов вектора $\dot{\sigma}$ при учете разложения компонентов вектора $\dot{\varepsilon}$ (9), получим

$$\dot{T} = A\dot{\varepsilon}, \tag{12}$$

где $T = (T_{11}, T_{13}, M_{11}, T_{12}, T_{22}, T_{23}, M_{12}, M_{22})^T$, T_{ij} – моменты нулевого порядка (усилия), M_{ij} – моменты первого порядка (моменты), вектор ε совпадает с приведенным выше, A – матрица коэффициентов упругости оболочки. Для вычисления приведенных коэффициентов матрицы A можно воспользоваться известными формулами [5-7].

В нелинейной теории упругости уравнения равновесия и граничные условия в напряжениях имеют такой же вид, как их аналоги в линейной теории упругости, если воспользоваться компонентами тензора напряжений Пиолы [8]. В теории оболочек, где вместо напряжений используются моменты от них нулевого и первого порядка, статически эквивалентными компонентам тензора Пиолы будут компоненты вектора

$$T^* = \left(T_{11}^*,\ T_{12}^*,\ T_{13}^*,\ M_{11}^*,\ M_{12}^*, T_{21}^*\ T_{22}^*, T_{23}^*, M_{21}^*, M_{22}^*, \overline{T}_{13}, \overline{T}_{23}\right)^T, \tag{13}$$

которые можно найти как

$$T^* = M_c^T T, \tag{14}$$

где M_c^T – транспонированная матрица (8). Продифференцировав выражение (14), получим

$$\dot{T}^* = \left(M_c^T A M_c + M_p\right)\dot{\varepsilon}_l, \tag{15}$$

где M_p – матрица, коэффициенты которой находятся из равенства $M_p \dot{\varepsilon}_l = \dot{M}_c^T T$. Обозначим их как $P_{ij,}$ $(i, j = 1,...12)$. Учитывая то, что $P_{ij} = P_{ji}$ и матрица A – симметрична, можем констатировать, что матрица $\left(M_c^T A M_c + M_p\right)$ также симметрична.

Уравнения квазистатического состояния равновесия имеют вид

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial \dot{T}_{11}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \dot{T}_{21}^*}{\partial \alpha_2} + a_2\left(\dot{T}_{11}^* - \dot{T}_{22}^*\right) + a_1\left(\dot{T}_{21}^* + T_{12}^*\right) + \frac{1}{R_1}\dot{T}_{13}^* - \dot{q}\theta_1 - q\dot{\theta}_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} \rightarrow \\ 1,\, 2 \\ \leftarrow \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial \dot{T}_{13}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \dot{T}_{23}^*}{\partial \alpha_2} + a_2\dot{T}_{13}^* + a_1\dot{T}_{23}^* + \frac{1}{R_1}\dot{T}_{11}^* + \frac{1}{R_2}\dot{T}_{22}^* + \dot{q}\left(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) + q\left(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2\right) = 0,$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial \dot{M}_{11}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \dot{M}_{21}^*}{\partial \alpha_2} + a_2\left(\dot{M}_{11}^* - \dot{M}_{22}^*\right) + a_1\left(\dot{M}_{21}^* + \dot{M}_{12}^*\right)_1 - \overline{T}_{131} = 0, \quad \begin{pmatrix} \rightarrow \\ 1,\, 2 \\ \leftarrow \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Граничные условия формулируются относительно пяти функций, взятых по одной из пяти пар

$$\left(\dot{T}_{11}^*,\, \dot{u}\right)\ \left(\dot{T}_{12}^*,\, \dot{v}\right)\ \left(\dot{T}_{13}^*,\, w\right)\ \left(M_{11}^*, \theta\right)\ \left(M_{12}^*,\, \psi\right) \qquad (17)$$

при $\alpha_i = const,$ $i = 1, 2,$ $\begin{pmatrix} \rightarrow \\ 1,\, 2 \\ \leftarrow \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \rightarrow \\ u,\, v \\ \leftarrow \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \theta,\, \psi \\ \leftarrow \end{pmatrix}$, если контурные линии совпадают с координатными линиями.

При независящих от скоростей механических характеристиках материала можно показать, что соотношение (15) и уравнения (16) находятся из условия стационарности функционала

$$\dot{\Pi}_R = \iint\left[\dot{T}^T M_c \dot{\varepsilon}_l + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_l^T M_p \dot{\varepsilon}_l - \frac{1}{2}\dot{T}^T A^{-1}\dot{T} - q\dot{N}T\dot{u} - \dot{q}\left(\dot{N}^T U + N^T \dot{U}\right)\right]A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (18)$$

где $N^T U = \left[-\frac{1}{2}\theta_1 u - \frac{1}{2}\theta_2 v + \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right)w\right],$ $\quad \overline{u} = \left(u,\, v,\, w,\, \vartheta,\, \psi\right)^T$.

В случае пологих оболочек вариационный принцип относительно скоростей разрешающих функций получен в работе [9]. Потенциал нагрузки, которая в данном случае является следящим внешним давлением интенсивности q, существует только при определенных типах граничных условий [10].

Условие стационарности примет вид

$$\iint\left[\delta T^T\left(\varepsilon'(u_0)\dot{u} - A^{-1}\dot{T}\right) + \dot{T}^T\varepsilon'(u_0)\delta\dot{u} + T_0^T\varepsilon''(u_0)\dot{u}\delta\dot{u} - \right.$$

$$\left. - q_0\left(\delta\dot{N}^T\dot{u} + N^T\delta\dot{u}\right) - \dot{q}\left(\delta\dot{N}^T\dot{u}_0 + N_0^T\delta\dot{u}\right)\right]ds = 0\,. \qquad (19)$$

Отсюда получаем разрешающую систему дифференциальных уравнений в нормальном операторном виде. Первая группа уравнений имеет вид

$$\varepsilon'(u_0)\dot{u} - A^{-1}\dot{T} = 0\,. \qquad (20)$$

Вторую группу уравнений также получим из вариационного уравнения (19), применив интегрирование по частям.

Дифференциальные уравнения квазистатического равновесия запишутся в виде (16). Для решения системы (16), (20) будем использовать метод дискретной ортогонализации [3], который лежит в основе развитых численных процедур, обеспечивающих высокую точность получаемых результатов [4, 7].

Результаты расчета. Рассматриваемые оболочки содержат множество структурных и геометрических параметров, которые существенно влияют на вид равновесных кривых и значения критических нагрузок. К таким параметрам относятся механические характеристики элементарных слоев, их количество в слоистом пакете, направления укладки армирующих волокон по отношению к осям оболочки, значения компонент метрического тензора.

В качестве примера рассмотрим нелинейное осесимметричное деформирование однослойной оболочки вращения в форме сферического сегмента (рис.1), изготовленную из волокнистого композита с параметрами $E_1 = 44{,}5$ ГПа, $E_2 = 10{,}6$ ГПа, $G_{12} = 1{,}06$ ГПа, $G_{13} = G_{12}$, $G_{23} = 3{,}7$ ГПа, $\nu = 0{,}327$. На рис.2-4 показан вид диаграмм нагружения для пологой (рис.2) и непологих (рис.3-4) оболочек рассматриваемого вида. Для пологой оболочки отношение стрелы подъема H к толщине равнялось 4 при толщине 0,2см, $c = 10$ см, $R = \dfrac{c^2 + H^2}{2H}$, $\beta = arcsin\left(\dfrac{c}{R}\right)$ [9].

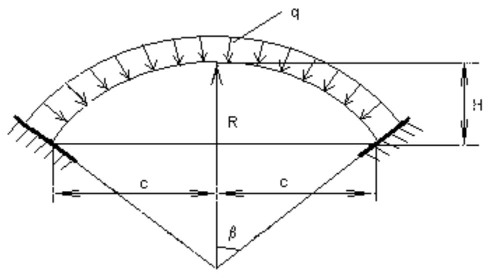

Рисунок 1

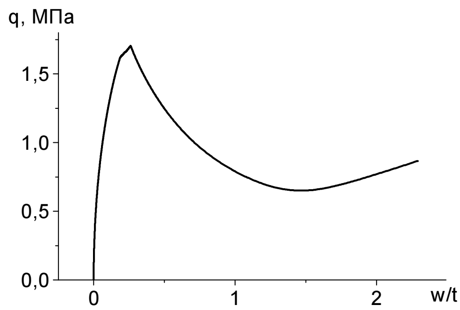

Рисунок 2

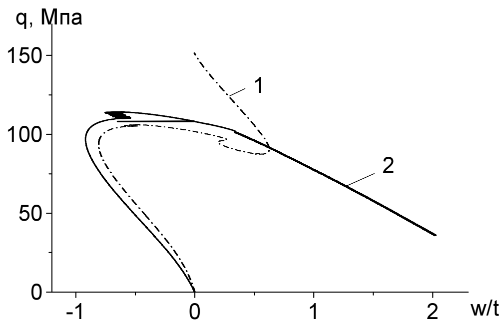

Рисунок 3

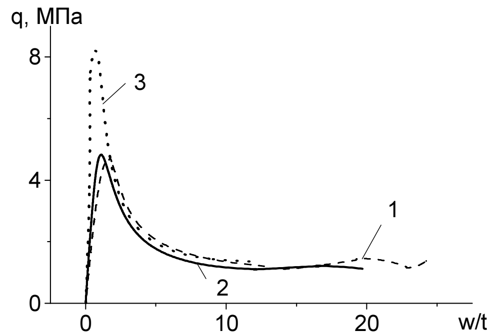

Рисунок 4

Для непологих оболочек в расчетах принято $\beta = 40^\circ$, $R = 100$ см, толщина 2 см, половина центрального угла в вершине сферы $\pi / 540$. На рис.2 показан вид равновесных кривых для ортотропной оболочки, на рис. 3, 4 - для анизотропных при различных углах ψ между меридианом и направлением армирования волокон. Так, на рис. 2 кривая 1 построена при $\psi = 0^\circ$, кривая 2 – при $\psi = 15^\circ$, на рис. 3 кривая 1 – при $\psi = 45^\circ$, кривая 2 – при $\psi = 60^\circ$, кривая 3 – при $\psi = 90^\circ$. На рис.5 показана зависимость кри-

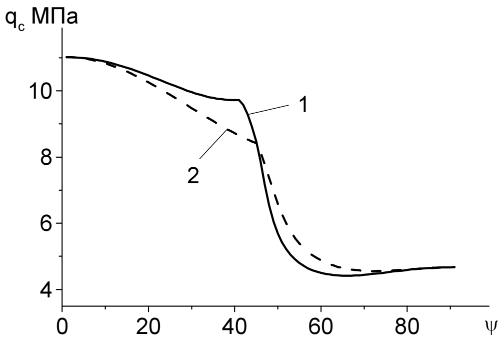

Рисунок5

тических нагрузок q_c от угла армирования ψ для ортотропной (кривая 1) оболочки и анизотропной (кривая 2) с одной плоскостью симметрии.

Выводы. Полученные результаты свидетельствуют о том, что композиционные материалы по своему функциональному использованию могут быть весьма эффективными, если предварительный анализ расчетных данных проводится с учетом современных достижений в смежных областях механики материалов и оболочечных конструкций. В частности, различие в поведении кривых (1) и (2) на рис.5 указывает на то, что пренебрежение анизотропией композитов при оптимизации структурных параметров оболочек не приведет к желаемому результату [5, 11-13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости / Новожилов В.В. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 211с.
2. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры / Шульга Н.А. – К.: Наукова думка, 1981. – 200с.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Годунов С.К. // Успехи математических наук. – 1961. – Том 16, вып. 3. – С.171-174.
4. Григолюк Э.И. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела / Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. – М.: Наука, 1988. – 232с.
5. Баженов В.Л. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок / Баженов В.Л., Семенюк М.П., Трач В.М. – К.: Каравела, 2010. – 352с.
6. Ванин Г.Л. Устойчивость оболочек из армированных материалов / Ванин Г.Л., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. – К.: Наукова думка, 1978. – 212с.
7. Григоренко Я.М. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами / Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. – К., Наукова думка, 1988. – 264с.
8. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Васидзу К. – М.: Мир, 1987. – 542с.
9. Кантор Б.Я. Змішаний варіаційний принцип теорії гнучких пружно пластичних пологих оболонок / Кантор Б.Я. // Доповіді АН УРСР, Сер.А. – 1970. – №12. – С.1095-1098.
10. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / Гузь А.Н. – К.: Вища школа, 1986. – 512с.
11. Semenyuk N.P. On Stability and Postbuckling Behavior of Shells with Corrugated Cross Sections Under External Pressure / Semenyuk N.P., Morenko A.I., Smith mM.J.A. // J.Appl. Mech. – 2014. – 81, №1.
12. Семенюк Н.П. Устойчивость гофрированных арок при внешнем давлении / Семенюк Н.П. // Прикладная механика. – 2013. – Том 49, № 2. – С.90-98.
13. Семенюк Н.П. Устойчивость и закритическое поведение волнообразных цилиндрических панелей при внешнем давлении / Семенюк Н.П., Жукова Н.Б. // Прикладная механика. – 2013. – № 6. – С.86-95.

Поступила в редколлегию 09.04.2014.