

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

КОНЦЕНТРАЦІЯ МЕХАНІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО ОТВОРУ В П'ЄЗОКЕРАМІЧНІЙ ПЛАСТИНІ ПРИ РІВНОМІРНОМУ РОЗТЯГУ

Вступ. Широке застосування п'єзокерамічних пластин і оболонок, як активних елементів електромеханічного перетворення енергії, потребує розвитку підходів до побудови теорії їх статичного чи динамічного деформування. Вони можуть мати різні отвори, порожнини та інші дефекти, навколо яких виникають зони концентрації напружень. Цій проблемі приділяється достатньо уваги [1-5]. У роботах [5-7] редукція тривимірних задач теорії електропружності до двовимірних здійснюється за допомогою методу розвинення шуканих функцій у ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини. Дослідження напруженого стану трансверсально-ізотропних п'єзокерамічних пластин, послаблених круговими отворами, проведено в [8, 9]. В даній роботі цим самим способом сумісно з методом збурення форми границі [10] знаходиться розв'язок задачі про визначення концентрації механічних напружень біля еліптичного отвору в п'єзокерамічній пластині, що знаходиться під дією постійного усестороннього розтягу.

Постановка задачі і основні співвідношення. Розглянемо п'єзокерамічну пластину постійної товщини $2h$ ($h = \text{const}$), віднесена до декартової системи координат x_j ($j = 1, 2, 3$). Будемо вважати, що граничні площини $x_3 = \pm h$ неелектродовані та вільні від механічних напружень. Пластина послаблена криволінійним отвором і знаходиться під дією постійних розтягуючих сил. Для визначення просторового напруженого стану пластини використовується метод розвинення у ряд за поліномами Лежандра сумісно з методом збурення форми границі [10].

Представимо, наслідуючи [7, 8], компоненти вектора переміщень $u_j(x_1, x_2, x_3)$ і тензора напружень $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, електричної індукції $D_j(x_1, x_2, x_3)$ і діелектричного потенціалу $\phi(x_1, x_2, x_3)$ у вигляді рядів Фур'є за поліномами Лежандра $P_k(\xi)$, тобто

$$\begin{aligned} \{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} &= \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), h^{-1}\sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \\ \{\phi(x_1, x_2, x_3), D_j(x_1, x_2, x_3)\} &= \sum_{k=0}^N \{\phi^{(k)}(x), h^{-1}D_j^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \end{aligned} \quad (1)$$

де $x = (x_1, x_2) \in S$, $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1; 1]$, S – серединна площина пластини; $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$, $\phi^{(k)}(x)$, $D_j^{(k)}(x)$ – коефіцієнти розкладу; N – натуральне число, яке для зручності вважатимемо парним: $N = 2n$ ($n = 0, 1, 2, \dots < \infty$).

Відносно коефіцієнтів розкладу як функцій двох незалежних змінних отримуємо рівняння рівноваги і відповідні граничні умови. Для трансверсально-ізотропних пластин вони розпадаються на дві групи рівнянь, що описують симетричне і косиметричне деформування пластини. При симетричному деформуванні загальний розв'язок рівнянь рівноваги представляється формулами [7]

$$c_{66}u_+^{(0)} = \kappa^* \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m;$$

$$\begin{aligned}
 c_{66}u_+^{(2)} &= \kappa_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} w_s ; \\
 c_{66}u_+^{(2k)} &= h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} w_s \quad (k = \overline{2, n}); \\
 c_{66}u_3^{(1)} &= -\kappa_1^* h [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(1)} V_m; \quad c_{66}u_3^{(2k-1)} = \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(2k-1)} V_m; \\
 \phi^{(1)} &= -\tilde{\kappa}_1^* h [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + \sum_{m=1}^{3n} \tilde{c}_m^{(1)} V_m; \quad \phi^{(2k-1)} = \sum_{m=1}^{3n} \tilde{c}_m^{(2k-1)} V_m \quad (k = \overline{1, n}),
 \end{aligned} \tag{2}$$

де $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – довільні аналітичні функції; V_m та w_s – метагармонічні функції, що задовольняють рівнянням

$$\Delta V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \quad \Delta w_s - \lambda_s h^{-2} w_s = 0, \tag{3}$$

в яких Δ – оператор Лапласа, k_m , λ_s – корені відповідних характеристичних рівнянь.

Введемо в області S полярні координати r, θ і запишемо визначальні рівняння таким чином

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= 4h [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + 2 \sum_{m=1}^{3n} d_m^{(0)} V_m; \quad \sigma_{33}^{(2k)} = \sum_{m=1}^{3n} d_{3m}^{(2k)} V_m; \\
 \sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(0)} &= 4h \left[-z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m \right] e^{-2i\theta}; \\
 \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} &= 2 \sum_{m=1}^{3n+2} d_m^{(2k)} V_m; \quad \varepsilon_{11}^{-1} D_3^{(2k)} = \sum_{m=1}^{3n} \tilde{d}_{3m}^{(2k)} V_m; \\
 \sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} &= 4h \left[\lambda_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi'''(z)} + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m \right] e^{-2i\theta}; \\
 \sigma_{r3}^{(2k-1)} &= 2h \left[\sum_{m=1}^{3n} p_m^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} w_s \right] e^{-i\theta}; \\
 \varepsilon_{11}^{-1} \left(D_r^{(2k-1)} + iD_\theta^{(2k-1)} \right) &= 2 \left[\kappa_D^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + \sum_{m=1}^{3n} \tilde{p}_m^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^n \tilde{q}_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} w_s \right] e^{-i\theta}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

На основі даного розв'язку розглянемо задачу про напружений стан п'єзокерамічної пластини, послабленої еліптичним отвором. Поверхня порожнини вільна від електричних і механічних навантажень, а на нескінченності пластини знаходиться під дією постійного всестороннього розтягу інтенсивності p ($p = const$). Нехай пластинка ослаблена криволінійним циліндричним отвором, контур L якого на серединній площині S незначно відрізняється від кругового L_0 радіуса R . Тоді контур L описується рівняннями [10]

$$x_1 = R(\cos \vartheta + \varepsilon \cos \vartheta); \quad x_2 = R(\sin \vartheta - \varepsilon \sin \vartheta), \tag{5}$$

в яких ε – параметр, що визначає форму отвору. Для еліптичного отвору $\varepsilon = (a-b)(a+b)$; $R = (a+b)/2$, де a і b – півосі еліпса. Конформне відображення зовнішньої області одиничного круга на область, обмежену кривою L , задається формулою

$$z = x + iy = \omega(s) = \zeta + \varepsilon \zeta^{-1}, \quad (6)$$

де $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$; $x = x_1/R$, $y = x_2/R$; ρ і ϑ – ортогональні криволінійні координати. Оскільки система координат (ρ, ϑ, ξ) повернута на деякий кут β відносно $(r, \theta, 3)$ навколо спільної осі $\xi = x_3/h$, то маємо співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k)} &= \left(\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} \right) e^{2i\beta}; \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} = \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)}; \quad \sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1)} &= \left(\sigma_{r3}^{(2k-1)} - i\sigma_{\theta3}^{(2k-1)} \right) e^{i\beta}; \quad (7) \\ D_{\rho}^{(2k-1)} - iD_{\vartheta}^{(2k-1)} &= \left(D_r^{(2k-1)} - iD_{\theta}^{(2k-1)} \right) e^{i\beta}. \end{aligned}$$

$$\text{Тут } \sigma_{i'j'}^{(l)} = \sigma_{i'j'}^{(l)}(\rho, \vartheta) \quad (i', j' = \rho, \vartheta, \xi); \quad \sigma_{ij}^{(l)} = \sigma_{ij}^{(l)}(r, \theta) \quad (i, j = r, \theta, 3).$$

Граничні умови на кривій L області S записуються таким самим способом, як і для пластин із круговим отвором. Так, зокрема, для вільного від напружень отвору маємо умови

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\nu'}^{(2k)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = 0 \quad (\nu' = \rho, \vartheta; k = \overline{0, n}); \quad \sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = 0, \\ D_{\rho}^{(2k-1)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = 0 \quad (k = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (8)$$

Необхідно зазначити, що основні рівняння (3) в змінних ρ і ϑ будуть складними і знайти їх розв'язок з розділеними змінними досить важко. Тому розв'язок задачі шукатимемо у вигляді рядів за степенями малого параметра ε у вигляді

$$\sigma_{i'j'}^{(l)}(\rho, \vartheta) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \varepsilon^{\tau} \sigma_{i'j'}^{(l, \tau)}(\rho, \vartheta); \quad u_{j'}^{(l)}(\rho, \vartheta) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \varepsilon^{\tau} u_{j'}^{(l, \tau)}(\rho, \vartheta). \quad (9)$$

Підставляючи (9) разом із розкладом в ряд функцій $e^{i\beta}$, $e^{2i\beta}$ у співвідношення (7) і прирівнюючи вирази при однакових степенях параметра ε , отримаємо значення для компонент $\sigma_{i'j'}^{(l)}$. Таким чином, у кожному наближенні по параметру ε приходимо до розв'язання задачі для кругового отвору.

Голоморфні функції $\phi'_j(\zeta)$, $\psi'_j(\zeta)$ для зовнішньої крайової задачі представляємо у вигляді

$$\phi'_j(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \zeta^{-n}; \quad \psi'_j(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} \zeta^{-n}, \quad (10)$$

де $a_n^{(j)}$, $b_n^{(j)}$ – довільні постійні, $a_0^{(j)} = b_0^{(j)} = 0$ ($j > 0$); $a_0^{(0)}$, $b_0^{(0)}$ – константи, які визначаються напруженнями, заданими на нескінченності, тобто

$$a_0^{(0)} = \frac{1}{4h} \left(\sigma_{11}^{(0)\infty} + \sigma_{22}^{(0)\infty} \right); \quad b_0^{(0)} = \frac{1}{4h} \left(\sigma_{22}^{(0)\infty} - \sigma_{11}^{(0)\infty} + 2i\sigma_{12}^{(0)\infty} \right). \quad (11)$$

В залежності від значень коренів характеристичного рівняння, які можуть бути дійсними додатними (k_1) чи комплексно – спряженими ($k_2, k_3 = \overline{k_2}$), метагармонічні функції V_m записуються таким чином

$$V_1^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(j)} K_n(\rho x_1) e^{in\vartheta}, \quad V_2^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(j)} H_n^{(1)}(\rho x_2) e^{in\vartheta};$$

$$V_3^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(j)} H_n^{(2)}(\rho x_3) e^{in\vartheta}. \quad (12)$$

Тут K_n , $H_n^{(1)}$ і $H_n^{(2)}$ – циліндричні функції Бесселя, Ханкеля першого і другого роду відповідно; $x_1 = Rh^{-1}\sqrt{k_1}$, $x_2 = Rh^{-1}\sqrt{-k_2}$, $x_3 = \overline{x_3}$. Аналогічне представлення мають метагармонічні функції w_s . Довільні постійні даних функцій визначаються із граничних умов (8).

Висновки. Викладено результати числових досліджень напруженого стану біля еліптичного отвору в необмеженій п'єзокерамічній пластині, що знаходиться під дією усестороннього розтягу. Розрахунки проведені для пластини, виготовленої із матеріалу PZT- 4 [11]. Знайдені компоненти напружень з урахуванням трьох наближень за малим параметром ε .

У табл.1 наведено значення кільцевих напружень $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$ на контурі отвору ($\rho = 1$) на серединній площині $\xi = 0$ в точці $\vartheta = 0$ для першого і другого наближень в залежності від відношення a/b півосей еліпса; при цьому прийняті деякі значення відношення b/h . Із збільшенням відношення a/b коефіцієнт концентрації зростає. Натомість із збільшенням b/h він зменшується.

Таблиця 1 – Значення кільцевих напружень $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$

$a/b \backslash b/h$		a/b					
		1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
1.0	1 набл.	2.0	2.2058	2.3892	2.5573	2.7110	2.8516
	2 набл.	2.0	2.2168	2.4281	2.6375	2.8418	3.0398
2.0	1 набл.	2.0	2.1972	2.3738	2.5348	2.6819	2.8163
	2 набл.	2.0	2.2079	2.4119	2.6128	2.8088	2.9984
3.0	1 набл.	2.0	2.1931	2.3661	2.5242	2.6690	2.8016
	2 набл.	2.0	2.2033	2.4036	2.5989	2.7904	2.9757
4.0	1 набл.	2.0	2.1913	2.3627	2.5181	2.6638	2.7960
	2 набл.	2.0	2.2012	2.3980	2.5921	2.7814	2.9645

На рис.1 представлені криві зміни напружень $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$ від зміни відносної товщини пластини b/h на серединній (крива 1) і граничній (крива 2) площинах відповідно. Як видно, із збільшенням b/h напруження на серединній площині спадають, а на граничній – зростають. При тих самих даних криві на рис.2 характеризують зміну

нормальних поперечних напружень σ_{33}/P на серединній і граничній площинах пластини.

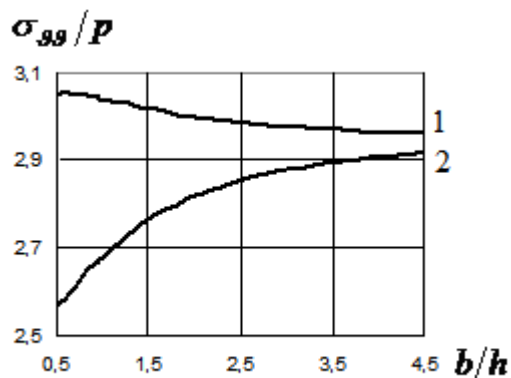


Рисунок 1

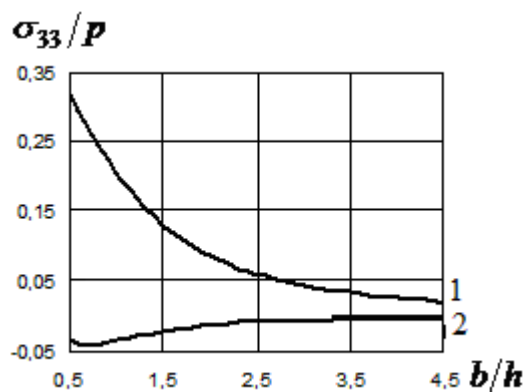


Рисунок 2

ЛІТЕРАТУРА

1. Калоеров С.А. Приближенный метод определения электроупругого состояния слоя и полосы с отверстиями и трещинами / Калоеров С.А., Глущенко Ю.А. // Теоретическая и прикладная механика. – 2004. – Вып. 39. – С.115-126.
2. Podil'chuk Yu.N. The stress state of a piezoceramic medium with an elliptic inclusion under pure shear and pure bending / Podil'chuk Yu.N., Proshchenko T.M. // Inter. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 5. – P.573-582.
3. Fil'shtinskii L.A. Concentration of mechanic stresses near a hole in piezoceramic layer / Fil'shtinskii L.A., Kovalev U.D. // Mech. Comp. Matter. – 2002. – 38, № 2. – P.121-124.
4. Григолюк Э.И. Растяжение пьезокерамического слоя, ослабленного сквозными туннельными полостями / Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А., Ковалев Ю.Д. // Докл. РАН. – 2004. – Т. 385, № 1. – С.61-63.
5. Khoma I.Yu. Solving the equilibrium equations for a transversely isotropic piezoceramic plate / Khoma I.Yu., Proshchenko T.M., Kondratenko O.A. // Inter. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 10. – P.96-106.
6. Khoma I.Yu. Thermopiezoelectric equations for nonthin ceramic shells / Khoma I.Yu. // Inter. Appl. Mech. – 2005. – 41, № 2. – P.118-128.
7. Хома И.Ю. О напряженном состоянии нетонкой пьезокерамической пластинки с круговым отверстием / Хома И.Ю. // Теоретическая и прикладная механика. – 2004. – Вып. 39. – С.48-58.
8. Хома И.Ю. Про напружений стан трансверсально-ізоотропного п'єзокерамічного шару з круговою циліндричною порожниною / Хома И.Ю., Прошенко Т.М. // Доп. НАН України. – 2005. – № 10. – С.64-69.
9. Хома И.Ю. Трехмерное распределение напряжений около кругового отверстия в нетонкой пьезокерамической пластине / Хома И.Ю., Хома Ю.И., Прошенко Т.М. // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С.18-23.
10. Гузь О.М. Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках / Гузь О.М. // Прикладна механіка. – 1962. – 8, № 6. – С.605-612.
11. Гринченко В.Т. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. – К.: 1989. – 290с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5т.; Т. 5)

Надійшла до редколегії 03.04.2014.