УДК 539.3

ХОРОШУН Л.П., д.т.н., чл.-кор. НАН Украины
ШИКУЛА Е.Н., д.физ.-мат.н., вед.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ

ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ДОЛГОВРЕМЕННАЯ МИКРОПОВРЕЖДАЕМОСТЬ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Введение. Один из возможных механизмов разрушения материалов и элементов конструкций при нагружении связан с появлением и развитием во времени рассеянных микроповреждений, приводящих, как правило, к образованию магистральных трещин. Согласно физическим представлениям, поврежденность материала можно рассматривать как наличие рассеянных дефектов в виде микротрещин, микропустот или разрушенных микрообъемов, которые приводят к уменьшению эффективной или несущей части материала, оказывающей сопротивление нагрузкам. Экспериментальные данные и наблюдения за работой элементов конструкций и сооружений свидетельствуют о том, что повреждаемость может быть как кратковременной (мгновенной), соответствующей уровню напряжений или деформаций в момент их задания, так и длительной, проявляющейся в росте повреждений во времени после приложения нагрузки. Теория кратковременной и долговременной повреждаемости построена соответственно в [1, 2]. При достаточно высоких нагрузках у многих материалов появляется физическая нелинейность деформирования. Такой вид нелинейности характерен для металлов, а также для полимерных материалов при высоких температурах. Поэтому построение модели деформирования и длительной повреждаемости физически нелинейного материала представляется актуальным.

Постановка задачи. Рассмотрим физически нелинейное деформирование изотропного материала, описываемое зависимостью модулей объемного сжатия K и сдвига μ от деформаций, которое сопровождается микроповреждаемостью в процессе нагружения. Микроповреждаемость материала моделируем образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности.

Зависимости между макронапряжениями и макродеформациями можно записать в виде

$$<\sigma_{ij}>=\left(K^{*}-\frac{2}{3}\mu^{*}\right)<\varepsilon_{rr}>\delta_{ij}+2\mu^{*}<\varepsilon_{ij}>, \tag{1}$$

где эффективные модули объемного сжатия K^{*} и сдвига μ^{*} будут функциями пористости p и макродеформаций $<\varepsilon_{ij}>$. Определение эффективных модулей упругости пористого физически нелинейного материала сводится к итерационному алгоритму

$$K^{*(n)}=\frac{4K(<\varepsilon_{ij}^{1}>^{(n)})\mu(<\varepsilon_{ij}^{1}>^{(n)})(1-p)^{2}}{3K(<\varepsilon_{ij}^{1}>^{(n)})p+4\mu(<\varepsilon_{ij}^{1}>^{(n)})(1-p)};$$

$$\mu^{*(n)}=\frac{[9K(<\varepsilon_{ij}^{1}>^{(n)})+8\mu(<\varepsilon_{ij}^{1}>^{(n)})]\mu(<\varepsilon_{ij}^{1}>^{(n)})(1-p)^{2}}{3K(<\varepsilon_{ij}^{1}>^{(n)})(3-p)+4\mu(<\varepsilon_{ij}^{1}>^{(n)})(2+p)};$$

$$<\varepsilon_{ij}^{1}>^{(n)}=\frac{1}{(1-p)}\left[\frac{K^{*(n-1)}}{K(<\varepsilon_{ij}^{1}>^{(n)})}V_{ij\alpha\beta}+\frac{\mu^{*(n-1)}}{\mu(<\varepsilon_{ij}^{1}>^{(n)})}D_{ij\alpha\beta}\right]<\varepsilon_{\alpha\beta}>, \tag{2}$$

где $V_{ij\alpha\beta}$, $D_{ij\alpha\beta}$ – объемная и девиаторная составляющие единичного тензора $I_{ij\alpha\beta}$, т.е.

$$I_{ij\alpha\beta} = V_{ij\alpha\beta} + D_{ij\alpha\beta};\ V_{ij\alpha\beta} = 1/3\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta};\ D_{ij\alpha\beta} = 1/2(\delta_{\alpha j}\delta_{j\beta} + \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha} - 2/3\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}). \quad (3)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала примем критерий прочности Губера – Мизеса

$$I^1_{<\sigma>} = k, \quad (4)$$

где $I^1_{<\sigma>} = (<\sigma^1_{ij}>'<\sigma^1_{ij}>')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $<\sigma^1_{ij}>'$ по неповрежденной части материала; k – предел микропрочности, являющийся случайной функцией координат. Так как средние по неповрежденной части материала напряжения $<\sigma^1_{ij}>$ связаны с макронапряжениями $<\sigma_{ij}>$ зависимостями

$$<\sigma^1_{ij}> = \frac{1}{1-p}<\sigma_{ij}>, \quad (5)$$

то инвариант девиатора тензора средних напряжений по неповрежденной части материала $I^1_{<\sigma>}$ связан с инвариантом девиатора тензора макронапряжений $I_{<\sigma>} = (<\sigma_{ij}>'<\sigma_{ij}>')^{1/2}$ и с инвариантом девиатора тензора деформаций $I_{<\varepsilon>} = (<\varepsilon_{ij}>'<\varepsilon_{ij}>')^{1/2}$ соответственно зависимостями

$$I^1_{<\sigma>} = \frac{1}{1-p}I_{<\sigma>};\qquad I^1_{<\sigma>} = \frac{2\mu^*}{1-p}I_{<\varepsilon>}. \quad (6)$$

Поэтому из (5), (6) получим критерий прочности в пространстве соответственно макронапряжений и макродеформаций

$$\frac{1}{1-p}I_{<\sigma>} = k;\qquad \frac{2\mu^*(p,<\varepsilon_{ij}>)}{1-p}I_{<\varepsilon>} = k. \quad (7)$$

Если величина $I^1_{<\sigma>}$ для некоторого микрообъема материала не достигает соответствующего предельного значения k, то согласно критерию длительной прочности разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ_k, длительность которого зависит от степени близости $I^1_{<\sigma>}$ к предельному значению k. В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k = \varphi(I^1_{<\sigma>}, k), \quad (8)$$

причем $\varphi(k,k) = 0$, $\varphi(0,k) = \infty$.

Одноточечную функцию распределения $F(k)$ предела прочности k микрообъема неповрежденной части материала можно аппроксимировать степенным законом на некотором отрезке

$$F(k)=\begin{cases}0, & k<k_0;\\ \left(\dfrac{k-k_0}{k_1-k_0}\right)^{\beta}, & k_0\le k\le k_1;\\ 1, & k>k_1\end{cases} \tag{9}$$

или распределением Вейбулла

$$F(k)=\begin{cases}0, & k<k_0;\\ 1-\exp\left[-m(k-k_0)^{\beta}\right], & k\ge k_0.\end{cases} \tag{10}$$

Здесь k_0 – минимальная величина предельного значения k, с которого начинается разрушение в некоторых объемах материала; k_1, m, β – постоянные, выбираемые из условия аппроксимации разброса прочности в материале.

Примем, что случайное поле предела микропрочности материала k является статистически однородным, что характерно для реальных материалов, а размеры единичных микроразрушений и расстояний между ними пренебрежимо малы по сравнению с размерами включений и расстояний между ними. Тогда функция распределения $F(k)$ определяет относительное содержание неразрушенной части материала, в котором предел микропрочности меньше значения k. Поэтому при ненулевых напряжениях $<\sigma_{ij}^1>$ функция $F(I_{<\sigma>}^1)$ определяет согласно (4), (9), (10), относительное содержание мгновенно разрушенных микрообъемов материала. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, принимая начальную пористость материала равной p_0, можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости материала при кратковременной повреждаемости [1]

$$p=p_0+(1-p_0)F(I_{<\sigma>}^1). \tag{11}$$

Для заданных однородных макронапряжений $<\sigma_{ij}>$ и макродеформаций $<\varepsilon_{ij}>$ согласно (7) уравнение баланса пористости (11) соответственно имеет вид

$$p=p_0+(1-p_0)F\left(\frac{1}{1-p}I_{<\sigma>}\right);\qquad p=p_0+(1-p_0)F\left(\frac{2\mu^*(p,<\varepsilon_{ij}>)}{1-p}I_{<\varepsilon>}\right). \tag{12}$$

Если напряжения в материале $<\sigma_{ij}^1>$ действуют в течение некоторого времени t, то согласно критерию длительной прочности (8) за это время в материале разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k, для которых имеет место неравенство

$$t\ge\tau_k=\varphi(I_{<\sigma>}^1,k), \tag{13}$$

где величина $I_{<\sigma>}^1$ определяется выражениями (6).

Время τ_k хрупкого разрушения материала для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение, начиная только с некоторого значения $I_{<\sigma>}^1>0$. В этом случае функцию долговечности материала $\varphi(I_{<\sigma>}^1,k)$ можно представить, например, дробно-степенной зависимостью

$$\varphi(I^1_{<\sigma>}, k) = \tau_0 \left(\frac{k - I^1_{<\sigma>}}{I^1_{<\sigma>} - \gamma k} \right)^{n_1} \qquad (\gamma k \le I^1_{<\sigma>} \le k, \quad \gamma < 1), \tag{14}$$

где некоторое характерное время τ_0, показатель n_1 и коэффициент γ определяются из аппроксимации экспериментальных кривых долговечности материала.

Подставляя (14) в (13), приходим к неравенству

$$k \le I^1_{<\sigma>} \frac{1 + \bar{t}^{1/n_1}}{1 + \gamma \bar{t}^{1/n_1}} \qquad \left(\bar{t} = \frac{t}{\tau_0} \right). \tag{15}$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F(k)$, приходим к выводу, что функция $F[(I^1_{<\sigma>})\psi(\bar{t})]$, где [2]

$$\psi(\bar{t}) = \frac{1 + \bar{t}^{1/n_1}}{1 + \gamma \bar{t}^{1/n_1}}, \tag{16}$$

определяет в момент времени $\bar{t}$ относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала. Тогда с учетом (11) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для материала при длительной повреждаемости можно представить в виде [2]

$$p = p_0 + (1 - p_0) F[(I^1_{<\sigma>})\psi(\bar{t})] \tag{17}$$

или с учетом (5) в виде

$$p = p_0 + (1 - p_0) F\left[\frac{I_{<\sigma>}}{1 - p} \psi(\bar{t}) \right], \tag{18}$$

где пористость p является функцией безразмерного времени $\bar{t}$, а величина $I_{<\sigma>}$ определяется выражениями (6).

Уравнения баланса пористости (17) с учетом (9), (10) в начальный момент $\bar{t} = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала. С ростом времени уравнения (17), (9), (10), (16) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной поврежденности, развивающейся во времени. Совместно с уравнениями (2), они образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы физически нелинейного деформирования и долговременной повреждаемости материала. Физическая нелинейность влияет на образование пористости материала при деформировании, изменение пористости в процессе деформирования влияет на кривую деформирования. Поэтому результирующая диаграмма деформирования обусловлена физической нелинейностью материала и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости при физически нелинейном деформировании.

Численные результаты. В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости материала, объемные деформации которого являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в микрообъеме имеют место соотношения

$$<\sigma_{rr}> = K <\varepsilon_{rr}>; \qquad <\sigma_{ij}>' = 2\mu(S) <\varepsilon_{ij}>'. \tag{19}$$

Здесь модуль объемного сжатия K не зависит от деформаций, а модуль сдвига $\mu(S)$ описывается функцией

$$\mu(S)=\begin{cases}\mu_0, & T\le T_0;\\ \mu'+\left(1-\dfrac{\mu'}{\mu_0}\right)\dfrac{T_0}{2S}, & T\ge T_0,\end{cases} \tag{20}$$

причем

$$S=(<\varepsilon_{ij}>'<\varepsilon_{ij}>')^{1/2};\quad T=(<\sigma_{ij}>'<\sigma_{ij}>')^{1/2};\quad T_0=\sqrt{2/3}\,\sigma_0, \tag{21}$$

где $<\varepsilon_{ij}>'$, $<\sigma_{ij}>'$ – девиаторы соответственно тензоров деформаций и напряжений; σ_0 – предел пропорциональности на растяжение, который принимаем независящим от координат; μ_0, μ' – постоянные материала.

На основе изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости однородного материала, имеющего диаграмму линейного упрочнения (20), (21) с постоянными

$$K=3{,}33\,ГПа;\quad \mu_0=1{,}11\,ГПа;\quad \mu'=0{,}331\,ГПа \tag{22}$$

и пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение $\sigma_p=\sqrt{3/2}\,k_0$,

$$\sigma_0=0{,}003\,ГПа;\quad \sigma_p=0{,}011\,ГПа \tag{23}$$

в случае заданных макропараметров

$$<\varepsilon_{11}>\ne 0;\quad <\sigma_{22}>=<\sigma_{33}>=0. \tag{24}$$

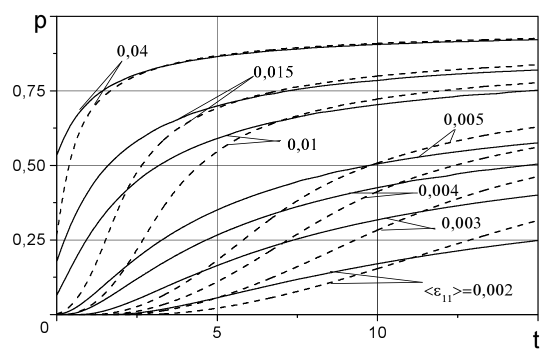

Рисунок 1 – Зависимость пористости материала от времени

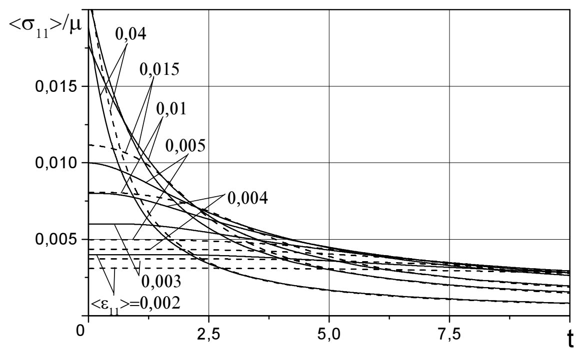

Рисунок 2 – Зависимость макронапряжения от времени

На рис.1 при различных значениях макродеформации $<\varepsilon_{11}>$ сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости материала p от времени $\bar{t}$ для линейно упрочняющегося материала при дробно-степенной функции долговечности $\psi(\bar{t})$, определяемой формулой (16). На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости p от $\bar{t}$ для линейного материала. Такие же обозначения приняты и на рис.2. Как видим, физическая нелинейность деформирования материала оказывает существенное влияние на его микроразрушение. Графики показывают, что для линейно упрочняющегося материала микроразрушения начинаются при больших значениях времени $\bar{t}$, а в дальнейшем проходят более интенсивно, т.е. при достаточно больших значениях времени $\bar{t}$ пористость линейно упрочняющегося материала выше, чем линейного.

На рис.2 при различных значениях макродеформации $<\varepsilon_{11}>$ сплошными линиями показаны кривые зависимостей макронапряжения $<\sigma_{11}>/\mu$ от времени $\bar{t}$ для линейно упрочняющегося материала при дробно-степенной функции долговечности $\psi(\bar{t})$, определяемой формулой (16). Графики показывают, что для малых значений времени $\bar{t}$ физическая нелинейность деформирования материала оказывает существенное влияние также и на его напряженное состояние. При достаточно больших значениях времени $\bar{t}$ влияние нелинейности на напряженное состояние материала несущественно.

Выводы. Предложена теория длительной повреждаемости для физически нелинейных однородных материалов. Процесс повреждаемости материала моделируется образованием в нем стохастически расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, обусловленной зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, что характеризует кратковременную прочность по критерию Губера-Мизеса, которая принимается случайной функцией координат. Для произвольного момента времени сформулировано уравнение баланса поврежденности (пористости) физически нелинейного материала. Построены алгоритмы вычисления микроповрежденности материала от времени, макронапряжений от времени, а также соответствующие кривые. Исследовано влияние нелинейности материала на кривые его макродеформирования и повреждаемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорошун Л.П. Основы микромеханики повреждаемости материала. 1. Кратковременная повреждаемость / Хорошун Л.П. // Прикладная механика. – 1998. – №10. – С.120-127.
2. Хорошун Л.П. Основы микромеханики повреждаемости материала. 2. Длительная повреждаемость / Хорошун Л.П. // Прикладная механика. – 2007. – № 2. – С.108-121.

Поступила в редколлегию 10.04. 2014.

УДК 539.3

ХОМА И.Ю., д.физ.-мат.н.
ДАШКО О.Г., к.физ.-мат.н.
КОВАЛЕНКО И.Г., мл.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Введение. Проблеме концентрации напряжений около отверстий в нетонких трансверсально-изотропных пластинах уделяется достаточно внимания. На этом классе граничных задач апробируются разные подходы и методы. Широко известен метод однородных решений, асимптотический, разложения по толщине и др. Для решения краевых задач в [1], [2] используется метод разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины. Относительно коэффициентов разложений, как функций двух независимых переменных, составляется система дифференциальных уравнений и естественные граничные условия. Излагается метод представления общего аналитического решения. Используя методику возмущения формы границы [3], в данной работе рассматривается задача о напряженном состоянии трансверсально-