3. Гузь О.М. Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках / Гузь О.М. // Прикладная механика. – 1962. – 8, № 6. – С.605-612.
4. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины / Векуа И.Н. // Тр. Тбилис. матем. ин-та – 1965. – 30. – С.3-103.
5. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. – К.: Наукова думка, 1980. – 686с. (Методы расчета оболочек: В 5-и томах.; Т. 1).

Поступила в редколлегию 10.04.2014.

УДК 539.3

КИРИЛЮК В.С., д.физ.-мат.н., вед.науч. сотр.
ЛЕВЧУК О.И., к.физ.-мат.н., ст.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ ПОД ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ (С УЧЕТОМ ОРИЕНТАЦИИ ТРЕЩИНЫ)

Введение. Исследования пространственных задач механики разрушения о напряженном состоянии упругого изотропного тела с дискообразными или эллиптическими трещинами проводились в ряде классических работ и монографий [1-3] и др. Значительно меньшее число работ посвящено изучению распределения напряжений в трансверсально-изотропном материале, содержащем плоские трещины круговой или эллиптической формы [4, 5] и др. При этом существенным ограничением в этих работах являлось предположение о расположении плоских трещин в плоскостях изотропии трансверсально-изотропного материала. Получение замкнутых решений упомянутых задач основано на известных представлениях общих решений трехмерных уравнений для изотропного и трансверсально-изотропного материалов через гармонические (квазигармонические) функции. Для упругого ортотропного материала такие представления не получены. Также для изотропного и ортотропного материалов фундаментальное решение (функция Грина для бесконечной среды) выражается в явном виде через элементарные функции, что принципиально отличает их от случая упругого ортотропного материала. Дополнительные математические трудности, связанные с упомянутыми обстоятельствами, не позволяют при рассмотрении трехмерных задач теории упругости для ортотропных материалов использовать методы и подходы, успешно применяемые при исследовании пространственных задач механики разрушения для изотропных и трансверсально-изотропных тел с плоскими трещинами.

Задачи о распределении напряжений в ортотропных материалах вблизи круговых или эллиптических трещин, расположенных в главных плоскостях ортотропии материала, изучены в [6, 7] на основе применения тройного преобразования Фурье, Фурье-образа функции Грина для ортотропной среды, теоремы о вычетах Коши и численного интегрирования на основе квадратур Гаусса. В настоящей работе этот подход усложнен для проведения расчетов напряженного состояния и КИН вдоль фронта эллиптической трещины с учетом ее ориентации в ортотропном материале. Даны рекомендации по применению аналитико-численного алгоритма решения задач при различных отношениях полуосей эллиптической трещины (под внутренним давлением).

Постановка задачи. Пусть ортотропная упругая среда (с осями ортотропии $0x$,

$0y$, $0z$ в системе координат (x, y, z)) содержит эллиптическую трещину, ориентация которой связана с локальной системой (x^1, y^1, z^1). Предположим, что от системы (x, y, z) можно перейти к системе (x^1, y^1, z^1) с помощью вращений осей $0x, 0y, 0z$ на углы α, β, γ соответственно. Упругие свойства ортотропного материала в системе (x, y, z) характеризуются девятью независимыми постоянными c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}. Упругие постоянные C_{ijkl} связаны с величинами c_{mn} зависимостями

$$C_{1111} = c_{11}; C_{2222} = c_{22}; C_{3333} = c_{33}; \qquad C_{1122} = C_{2211} = c_{12}; \qquad C_{1133} = C_{3311} = c_{13};$$
$$C_{2233} = C_{3322} = c_{23}; \; C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44};$$
$$C_{3131} = C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; \; C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}. \qquad (1)$$

При этом остальные компоненты тензора C_{ijkl} равны нулю. Ориентацию трещины можно учесть, переходя к решению задачи об эллиптической трещине (под внутренним давлением) в анизотропном упругом материале (в системе (x^1, y^1, z^1)), свойства которого находим с помощью преобразования тензора четвертого порядка

$$C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = C_{mnpq} T_{im} T_{jn} T_{kp} T_{lq}, \qquad (2)$$

где T_{ij} – матрица преобразования

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Эта матрица T_{ij} является результатом последовательного перемножения трех матриц, отражающих правые вращения вокруг каждой из осей координат.

Граничные условия на поверхности эллиптической трещины при равномерном давлении принимают вид

$$\sigma_{13}^{\pm} = 0; \sigma_{23}^{\pm} = 0; \; \sigma_{33}^{\pm} = -P_0 \;\; (x \in S); \; \vec{u}(\vec{x}) \to 0, \; |\vec{x}| \to \infty, \qquad (4)$$

где S – двусторонняя поверхность трещины, P_0 – заданное значение давления.

Метод решения. Воспользуемся интегральным выражением функции Грина для для анизотропного упругого пространства [8]

$$G_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} N_{ij}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \qquad (5)$$

где $N_{ij}(\vec{\xi})$ – соответствующие алгебраические дополнения элементов матрицы вида

$$\{K_{ki}(\vec{\xi})\} = \{C_{kjil}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \xi_j \xi_l\} = \{C_{klij}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \xi_l \xi_j\} = \{C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \xi_l \xi_j\} = \{K_{ik}(\vec{\xi})\}, \qquad (6)$$

а $D(\vec{\xi})$ – ее определитель. Для эллиптической трещины поле перемещений представим с помощью скачков перемещений [9] через поверхность трещины

$$u_i(\vec{x}) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{jlm3} b_m(\vec{x}') \xi_l N_{ij}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} d\vec{\xi} dx_1' dx_2', \tag{7}$$

где неизвестный вектор $\vec{b}(\vec{x})$ принимает вид $\vec{b}(\vec{x}) = \vec{b}\left(1 - x_1^2 / a_1^2 - x_2^2 / a_2^2\right)^{1/2}$. С помощью теоремы Коши о вычетах далее имеем

$$u_i(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{M=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S \frac{C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{jlm3} \xi_l^M N_{ij}(\vec{\xi}^M)}{\partial D(\vec{\xi}^M) / \partial \xi_3} b_m(\vec{x}') e^{i\vec{\xi}^M \cdot(\vec{x}-\vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx_1' dx_2', \tag{8}$$

где суммирование проводится для ξ_3^M – корней уравнения $D(\vec{\xi}) = 0$ с отрицательной мнимой частью, а вектор $\vec{\xi}^M$ принимает вид $\vec{\xi}^M = \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3^M(\xi_1, \xi_2)\right)$. Поле напряжений получаем в виде

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = \frac{-i}{4\pi^2} \sum_{M=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S \frac{C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijkl} C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{pqm3} \xi_q^M \xi_l^M N_{kp}(\vec{\xi}^M)}{\partial D(\vec{\xi}^M) / \partial \xi_3} b_m(\vec{x}') e^{i\vec{\xi}^M \cdot(\vec{x}-\vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx_1' dx_2'$$

Проводя дальнейшие упрощения, согласно [9] имеем

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = \frac{-i}{4} \int_0^{2\pi} \sum_{M=1}^{3} F^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijm} \left(\frac{\eta_1}{a_1}, \frac{\eta_2}{a_2} \xi_3^M (\eta_1 / a_1, \eta_2 / a_2) \right) b_m d\varphi, \tag{9}$$

где $\eta_1 = \cos\varphi$; $\eta_2 = \sin\varphi$, а функция F_{ijm} имеет вид

$$F^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijm}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijkl} C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{pqm3} \xi_q \xi_l N_{kp}(\vec{\xi})}{\partial D(\vec{\xi}) / \partial \xi_3}. \tag{10}$$

При вычислении контурных интегралов воспользуемся методом квадратур Гаусса, и, удовлетворив граничным условиям на поверхности трещины, определим неизвестные значения скачков перемещений. Из анализа асимптотических выражений напряжений в плоскости трещины приходим к следующим выражениям КИН:

$$k_{ij} = i\sqrt{\pi}(x_1^2 / a_1^4 + x_2^2 / a_2^4)^{-1/4} \sum_{M=1}^{3} F^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijm} \left(\frac{x_1}{a_1^2}, \frac{x_2}{a_2^2}, \xi_3^M (x_1 / a_1^2, x_2 / a_2^2) \right) b_m;$$

$$K_I = k_{33}; \;\; K_{II} = k_{31} n_1 + k_{32} n_2; \;\; K_{III} = k_{31}(-n_2) + k_{32} n_1, \tag{11}$$

где компоненты нормали в плоскости трещины к ее границе имеют вид $n_1 = (x_1 / a_1^2) / (x_1^2 / a_1^4 + x_2^2 / a_2^4)^{1/2}$, $n_2 = (x_2 / a_2^2) / (x_1^2 / a_1^4 + x_2^2 / a_2^4)^{1/2}$. Полученные выражения служат для оценки КИН эллиптической трещины (с учетом ее ориентации в ортотропном материале).

Анализ результатов численных исследований. Изучим распределение коэффициента интенсивности напряжений вдоль фронта эллиптической трещины, расположенной в ортотропном материале при различных ориентациях трещины. Упругие свойства ортотропного материала возьмем такими, что соответствуют ортогонально армированному стеклопластику (2:1) согласно [10]. На рис.1 приведено изменение КИН K_I вдоль границы эллиптической трещины с учетом ее ориентации в орторопном материале. При расчетах значения полуосей эллипса полагались такими: $a_1 = 1$; $a_2 = 0{,}5$. На рисунке линии 1, 2, 3 соответствовали значениям углов поворота $\gamma = 30^0;60^0;90^0$. Видно, что ориентация трещины в анизотропном материале влияет не только на сами значения КИН, но и на характер их распределения вдоль фронта трещины. На рис.2, 3 показано изменение коэффициентов интенсивности напряжений K_{II} и K_{III} вдоль границы эллиптической трещины при расположении трещины не в главных плоскостях ортотропии. Линии 1, 2 на этих рисунках соотвествовали значениям углов поворота $\beta = 30^0;60^0$. Отметим, что в случае расположения эллиптической трещины (под постоянным внутренним давлением) в плоскостях симметрии ортотропного материала, значения K_{II} и K_{III} равны нулю. Ненулевые значения этих величин для плоской трещины под внутренним давлением (при отсутствии касательных нагрузок) вызваны исключительно ее ориентацией не в главных плоскостях в ортотропном материале. Также отметим, что при численном нахождении контурных интегралов и вычислении КИН, использовались квадратурные формулы Гаусса различных порядков, начиная от *n*=12 и до *n*=96. Численный анализ результатов исследований показал, что при отношении полуосей эллиптической трещины $0{,}5 \le b/a \le 1$ (при различных ее ориентациях) достаточно ограничиться порядком квадратурной формулы *n*=24, в то же время для отношений $0{,}08 \le b/a \le 0{,}1$ в отдельных случаях возникала необходимость применения порядка *n*=96.

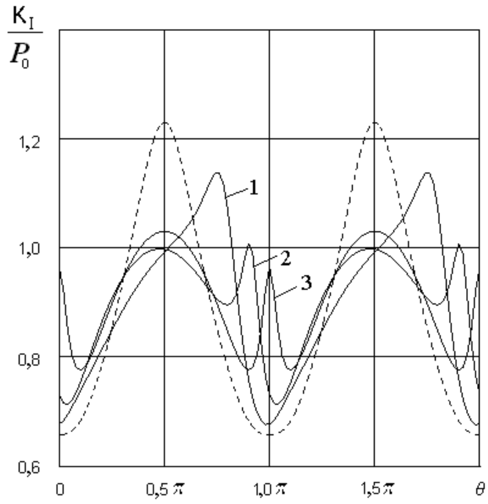

Рисунок 1

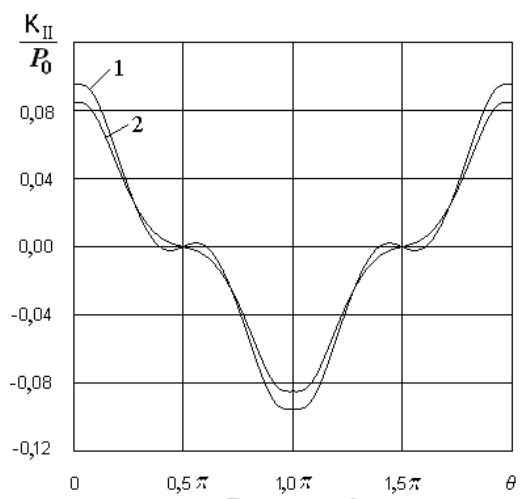

Рисунок 2

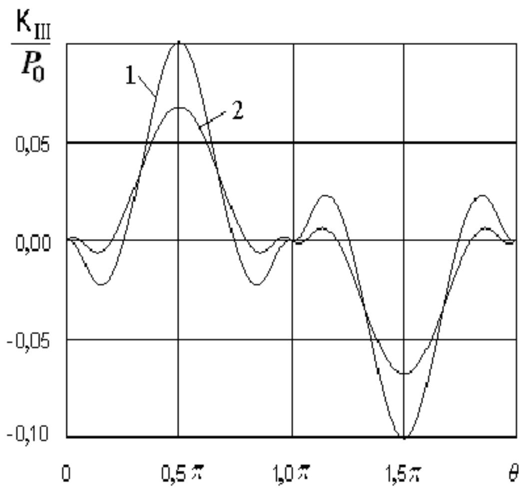

Рисунок 3

Выводы. Таким образом, в работе проведен аналитико-численный анализ коэффициентов интенсивности напряжений вдоль фронта эллиптической трещины (под однородным внутренним давлением) с учетом ее ориентации в упругом ортотропном материале. Установлены закономерности распределения КИН вдоль границы трещины при различных ее ориентациях. Показано, что ориентация трещины может значительным образом повлиять не только на значения КИН, но и на сам характер их распределения вдоль фронта трещины. Выявлены существенные эффекты, вызванные ориентацией трещины в анизотропном упругом материале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Теория упругости / Лурье А.И. – М.: Наука, 1970. – 939с.
2. Kassir M.K., Sih G. Three-dimensional crack problems / Kassir M.K., Sih G. – Leyden: Nordhoff Interen. Publ., 1975. – 425p. – (Mechanics of fracture; V. 2).
3. Shan R.C. and Kobayashi A.S. Stress intensity factors for an elliptical crack under arbitrary normal loading // Eng. Fract.Mech. – 1971. – № 3. – P.71-96.
4. Подильчук Ю.Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) / Подильчук Ю.Н. // Прикладная механика. – 1997. – № 10 (33). – С.3-30.
5. Chiang C.-R. Some crack problems in transversely isotropic solids / Chiang C.-R. // Acta Mechanica. – 2004. – № 1 (170). – P.1-9.
6. Kirilyuk V.S. On the stress state of the orthotropic medium with penny-shape crack // Int. Appl. Mech. – 2004.– 40, № 12.– P. 84–91.
7. Kirilyuk V.S. The stress state of an elastic orthotropic medium with elliptic crack under tension and shear / Kirilyuk V.S. // Int. Appl. Mech. – 2005. – № 4 (41). – P.358-366.
8. Mura T. Micromechanics of defects in solids / Mura T. – Boston, London: Martinus Nijhoff, 1987. – 587p.
9. Willis L.J. The stress field around an elliptical crack in an anisotropic medium / Willis L.J. // Int.J. Eng. Sci. – 1968. – T. 6, № 5. – P.253-263.
10. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / Лехницкий С.Г. – М.: Наука, 1977. – 415с.

Поступила в редколлегию 10.04.2014.

УДК 539.3

СТЕБЛЯНКО П.О., д.фіз.-мат.н., професор
КРАВЧУК Т.В., аспірант

Дніпродзержинський державний технічний університет
Черкаський національний університет ім. Б.Хмельницького

ПОБУДОВА БАЗИСНОГО ТРИВИМІРНОГО СПЛАЙНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Вступ. Сплайн-інтерполяція, на сьогодні, є одним із найточніших методів наближення, який широко застосовується для розв'язування задач математичного моделювання. І тому останнім часом дослідження різних способів сплайн-апроксимації є досить актуальним.

В сучасних умовах дизайнерська та інженерна діяльність тісно пов'язана з використанням електронно-обчислювальної техніки. Перед конструкторами, дизайнерами, інженерами завжди постає необхідність мати системи для точного моделювання, візуалізації та аналізу моделей. І чим простіші та ефективніші ці моделі, тим краще. Для цього і виникає необхідність побудови багатовимірних сплайн-функцій, що допоможе спростити процес моделювання, забезпечуючи при цьому високу точність. Протягом останніх років дослідженнями сплайнів та розв'язанням різноманітних задач з допомо-