при различных ее ориентациях. Показано, что ориентация трещины может значительным образом повлиять не только на значения КИН, но и на сам характер их распределения вдоль фронта трещины. Выявлены существенные эффекты, вызванные ориентацией трещины в анизотропном упругом материале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Теория упругости / Лурье А.И. – М.: Наука, 1970. – 939с.
2. Kassir M.K., Sih G. Three-dimensional crack problems / Kassir M.K., Sih G. – Leyden: Nordhoff Interen. Publ., 1975. – 425p. – (Mechanics of fracture; V. 2).
3. Shan R.C. and Kobayashi A.S. Stress intensity factors for an elliptical crack under arbitrary normal loading // Eng. Fract.Mech. – 1971. – № 3. – P.71-96.
4. Подильчук Ю.Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) / Подильчук Ю.Н. // Прикладная механика. – 1997. – № 10 (33). – С.3-30.
5. Chiang C.-R. Some crack problems in transversely isotropic solids / Chiang C.-R. // Acta Mechanica. – 2004. – № 1 (170). – P.1-9.
6. Kirilyuk V.S. On the stress state of the orthotropic medium with penny-shape crack // Int. Appl. Mech. – 2004.– 40, № 12.– P. 84–91.
7. Kirilyuk V.S. The stress state of an elastic orthotropic medium with elliptic crack under tension and shear / Kirilyuk V.S. // Int. Appl. Mech. – 2005. – № 4 (41). – P.358-366.
8. Mura T. Micromechanics of defects in solids / Mura T. – Boston, London: Martinus Nijhoff, 1987. – 587p.
9. Willis L.J. The stress field around an elliptical crack in an anisotropic medium / Willis L.J. // Int.J. Eng. Sci. – 1968. – T. 6, № 5. – P.253-263.
10. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / Лехницкий С.Г. – М.: Наука, 1977. – 415с.

Поступила в редколлегию 10.04.2014.

УДК 539.3

СТЕБЛЯНКО П.О., д.фіз.-мат.н., професор
КРАВЧУК Т.В., аспірант

Дніпродзержинський державний технічний університет
Черкаський національний університет ім. Б.Хмельницького

ПОБУДОВА БАЗИСНОГО ТРИВИМІРНОГО СПЛАЙНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Вступ. Сплайн-інтерполяція, на сьогодні, є одним із найточніших методів наближення, який широко застосовується для розв'язування задач математичного моделювання. І тому останнім часом дослідження різних способів сплайн-апроксимації є досить актуальним.

В сучасних умовах дизайнерська та інженерна діяльність тісно пов'язана з використанням електронно-обчислювальної техніки. Перед конструкторами, дизайнерами, інженерами завжди постає необхідність мати системи для точного моделювання, візуалізації та аналізу моделей. І чим простіші та ефективніші ці моделі, тим краще. Для цього і виникає необхідність побудови багатовимірних сплайн-функцій, що допоможе спростити процес моделювання, забезпечуючи при цьому високу точність. Протягом останніх років дослідженнями сплайнів та розв'язанням різноманітних задач з допомогою сплайн-функцій займалося багато, як зарубіжних, так і українських вчених. Зокрема, в публікації [6] запропоновано новий підхід до розв'язування задачі для циліндричної оболонки обертання зі змінною жорсткістю, в [5] запропоновано новий варіант методу розв'язку нестаціонарних двовимірних задач термоупругопластичності з допомогою сплайн-функцій, в [4] представлено побудову та дослідження просторових кубічних сплайнів, та їх практичне застосуванням в задачах механіки та математичної фізики, а також в [7] запропоновано побудову двовимірного базисного сплайну. Приставка О.П. в [3] представив дослідження двовимірних поліноміальних сплайнів на основі B-сплайнів п'ятого порядку, а також запропонував спосіб відтворення поверхонь та гіперповерхонь заснований на використанні B-сплайнів. Зеленський А.С. описав методику автоматизованого оконтурення рудних тіл з використанням B-сплайнів [2]. В посібнику Ашкеназі В.О. [1] обговорюється сучасний математичний апарат і обчислювальні алгоритми побудови сплайн-поверхонь.

Метою даної роботи є представлення побудови тривимірного базисного сплайну, утвореного як добуток трьох поліномів третього порядку.

Постановка задачі. Для представлення тривимірного базисного сплайну скористаємося наступною формулою:

$$S=\left(a_3\xi^3+a_2\xi^2+a_1\xi+a_0\right)\left(b_3\eta^3+b_2\eta^2+b_1\eta+b_0\right)\left(c_3\zeta^3+c_2\zeta^2+c_1\zeta+c_0\right). \qquad (1)$$

Щоб досягти поставленої мети необхідно знайти коефіцієнти $a_i,b_j,c_k \quad (i,j,k=0,1,2,3)$.

На рис.1 зображено куб, в якому необхідно побудувати базисний тривимірний сплайн (1).

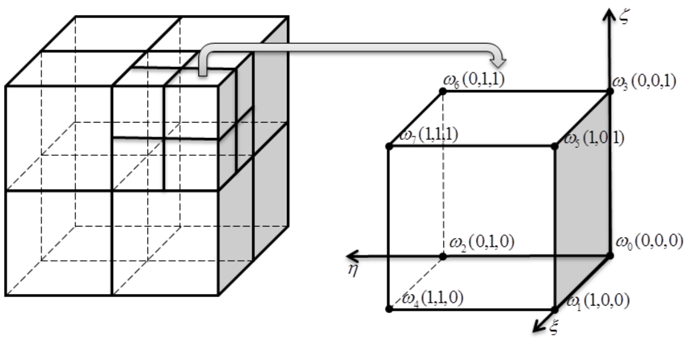


Рисунок 1

Результати роботи.

Знайдемо перші похідні по всім змінним сплайна (1):

$$\begin{aligned}
S_\xi&=\left(3a_3\xi^2+2a_2\xi+a_1\right)\left(b_3\eta^3+b_2\eta^2+b_1\eta+b_0\right)\left(c_3\zeta^3+c_2\zeta^2+c_1\zeta+c_0\right);\\
S_\eta&=\left(a_3\xi^3+a_2\xi^2+a_1\xi+a_0\right)\left(3b_3\eta^2+2b_2\eta+b_1\right)\left(c_3\zeta^3+c_2\zeta^2+c_1\zeta+c_0\right);\\
S_\zeta&=\left(a_3\xi^3+a_2\xi^2+a_1\xi+a_0\right)\left(b_3\eta^3+b_2\eta^2+b_1\eta+b_0\right)\left(3c_3\zeta^2+2c_2\zeta+c_1\right).
\end{aligned} \qquad (2)$$

Використаємо формули (1) і (2), підставляючи координати точок $\omega_i\,(i=0,1,2,...,7)$ (рис.1), і утворимо систему (3) з 32-х рівнянь із 12-ма невідомими:

1) $\omega_0=S(0,0,0)=a_0b_0c_0$, 2) $\omega_1=S(1,0,0)=(a_3+a_2+a_1+a_0)b_0c_0$,

3) $\omega_2=S(0,1,0)=a_0(b_3+b_2+b_1+b_0)c_0$, 4) $\omega_3=S(0,0,1)=a_0b_0(c_3+c_2+c_1+c_0)$,

5) $\omega_4=S(1,1,0)=(a_3+a_2+a_1+a_0)(b_3+b_2+b_1+b_0)c_0$, 6) $\omega_5=S(1,0,1)=(a_3+a_2+a_1+a_0)b_0(c_3+c_2+c_1+c_0)$,

7) $\omega_6=S(0,1,1)=a_0(b_3+b_2+b_1+b_0)(c_3+c_2+c_1+c_0)$, 8) $\omega_7=S(1,1,1)=(a_3+a_2+a_1+a_0)(b_3+b_2+b_1+b_0)(c_3+c_2+c_1+c_0)$,

9) $\omega_{0\xi}=S_\xi(0,0,0)=a_1b_0c_0$, 10) $\omega_{0\eta}=S_\eta(0,0,0)=a_0b_1c_0$,

11) $\omega_{0\zeta}=S_\zeta(0,0,0)=a_0b_0c_1$, 12) $\omega_{1\xi}=S_\xi(1,0,0)=(3a_3+2a_2+a_1)b_0c_0$,

13) $\omega_{1\eta}=S_\eta(1,0,0)=(a_3+a_2+a_1+a_0)b_1c_0$, 14) $\omega_{1\zeta}=S_\zeta(1,0,0)=(a_3+a_2+a_1+a_0)b_0c_1$,

15) $\omega_{2\xi}=S_\xi(0,1,0)=a_1(b_3+b_2+b_1+b_0)c_0$, 16) $\omega_{2\eta}=S_\eta(0,1,0)=a_0(3b_3+2b_2+b_1)c_0$,

17) $\omega_{2\zeta}=S_\zeta(0,1,0)=a_0(b_3+b_2+b_1+b_0)c_1$, 18) $\omega_{3\xi}=S_\xi(0,0,1)=a_1b_0(c_3+c_2+c_1+c_0)$,

19) $\omega_{3\eta}=S_\eta(0,0,1)=a_0b_1(c_3+c_2+c_1+c_0)$, 20) $\omega_{3\zeta}=S_\zeta(0,0,1)=a_0b_0(3c_3+2c_2+c_1)$,

21) $\omega_{4\xi}=S_\xi(1,1,0)=(3a_3+2a_2+a_1)(b_3+b_2+b_1+b_0)c_0$, 22) $\omega_{4\eta}=S_\eta(1,1,0)=(a_3+a_2+a_1+a_0)(3b_3+2b_2+b_1)c_0$,

23) $\omega_{4\zeta}=S_\zeta(1,1,0)=(a_3+a_2+a_1+a_0)(b_3+b_2+b_1+b_0)c_1$, 24) $\omega_{5\xi}=S_\xi(1,0,1)=(3a_3+2a_2+a_1)b_0(c_3+c_2+c_1+c_0)$,

25) $\omega_{5\eta}=S_\eta(1,0,1)=(a_3+a_2+a_1+a_0)b_1(c_3+c_2+c_1+c_0)$, 26) $\omega_{5\zeta}=S_\zeta(1,0,1)=(a_3+a_2+a_1+a_0)b_0(3c_3+2c_2+c_1)$,

27) $\omega_{6\xi}=S_\xi(0,1,1)=a_1(b_3+b_2+b_1+b_0)(c_3+c_2+c_1+c_0)$, 28) $\omega_{6\eta}=S_\eta(0,1,1)=a_0(3b_3+2b_2+b_1)(c_3+c_2+c_1+c_0)$,

29) $\omega_{6\zeta}=S_\zeta(0,1,1)=a_0(b_3+b_2+b_1+b_0)(3c_3+2c_2+c_1)$,

30) $\omega_{7\xi}=S_\xi(1,1,1)=(3a_3+2a_2+a_1)(b_3+b_2+b_1+b_0)(c_3+c_2+c_1+c_0)$, (3)

31) $\omega_{7\eta}=S_\eta(1,1,1)=(a_3+a_2+a_1+a_0)(3b_3+2b_2+b_1)(c_3+c_2+c_1+c_0)$,

32) $\omega_{7\zeta}=S_\zeta(1,1,1)=(a_3+a_2+a_1+a_0)(b_3+b_2+b_1+b_0)(3c_3+2c_2+c_1)$.

Потрібно виразити невідомі коефіцієнти a_i,b_j,c_k $(i,j,k=0,1,2,3)$ через наперед задані $\omega_m,\omega_{m\xi},\omega_{m\eta},\omega_{m\zeta}\,(m=0,1,2,...,7)$, для цього із системи (3) виберемо 10 рівнянь, утворивши нову систему (4) (оскільки інші 22 рівняння можна виразити через рівняння системи (4), наприклад $\omega_7=\dfrac{\omega_1\omega_2\omega_3}{\omega_0^2}$, при $\omega_0\neq 0$):

$$\begin{cases}\omega_0=S(0,0,0)=a_0b_0c_0\\ \omega_1=S(1,0,0)=(a_3+a_2+a_1+a_0)b_0c_0\\ \omega_2=S(0,1,0)=a_0(b_3+b_2+b_1+b_0)c_0\\ \omega_3=S(0,0,1)=a_0b_0(c_3+c_2+c_1+c_0)\\ \omega_{0\xi}=S_\xi(0,0,0)=a_1b_0c_0\\ \omega_{0\eta}=S_\eta(0,0,0)=a_0b_1c_0\\ \omega_{0\zeta}=S_\zeta(0,0,0)=a_0b_0c_1\\ \omega_{1\xi}=S_\xi(1,0,0)=(3a_3+2a_2+a_1)b_0c_0\\ \omega_{2\eta}=S_\eta(0,1,0)=a_0(3b_3+2b_2+b_1)c_0\\ \omega_{3\zeta}=S_\zeta(0,0,1)=a_0b_0(3c_3+2c_2+c_1)\end{cases}. \quad (4)$$

Розв’яжемо систему (4) відносно невідомих коефіцієнтів a_i,b_j,c_k $(i,j,k=0,1,2,3)$, причому a_0,b_0,c_0 – візьмемо за параметри. В результаті проведених розрахунків при $\omega_0\neq 0$ отримаємо:

$$\begin{aligned}
&a_1=\omega_{0\xi}\cdot\frac{a_0}{\omega_0}; \quad a_2=\left(3\omega_1-3\omega_0-2\omega_{0\xi}-\omega_{1\xi}\right)\frac{a_0}{\omega_0}; \quad a_3=\left(-2\omega_1+2\omega_0+\omega_{0\xi}+\omega_{1\xi}\right)\frac{a_0}{\omega_0};\\
&b_1=\omega_{0\eta}\cdot\frac{b_0}{\omega_0}; \quad b_2=\left(3\omega_2-3\omega_0-2\omega_{0\eta}-\omega_{2\eta}\right)\frac{b_0}{\omega_0}; \quad b_3=\left(-2\omega_2+2\omega_0+\omega_{0\eta}+\omega_{2\eta}\right)\frac{b_0}{\omega_0}; \quad (5)\\
&c_1=\omega_{0\zeta}\cdot\frac{c_0}{\omega_0}; \quad c_2=\left(3\omega_3-3\omega_0-2\omega_{0\zeta}-\omega_{3\zeta}\right)\frac{c_0}{\omega_0}; \quad c_3=\left(-2\omega_3+2\omega_0+\omega_{0\zeta}+\omega_{3\zeta}\right)\frac{c_0}{\omega_0}.
\end{aligned}$$

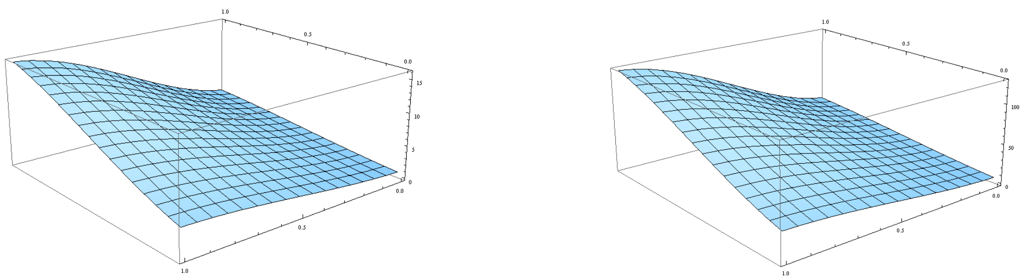
Введемо позначення:

$$\begin{array}{lll} A_1=\omega_{0\xi}; & A_2=\left(3\omega_1-3\omega_0-2\omega_{0\xi}-\omega_{1\xi}\right); & A_3=\left(-2\omega_1+2\omega_0+\omega_{0\xi}+\omega_{1\xi}\right); \\ B_1=\omega_{0\eta}; & B_2=\left(3\omega_2-3\omega_0-2\omega_{0\eta}-\omega_{2\eta}\right); & B_3=\left(-2\omega_2+2\omega_0+\omega_{0\eta}+\omega_{2\eta}\right); \\ C_1=\omega_{0\zeta}; & C_2=\left(3\omega_3-3\omega_0-2\omega_{0\zeta}-\omega_{3\zeta}\right); & C_3=\left(-2\omega_3+2\omega_0+\omega_{0\zeta}+\omega_{3\zeta}\right); \end{array} \tag{6}$$

Підставимо вирази знайдених коефіцієнтів (5) в (1), використавши позначення (6). В результаті маємо загальний вигляд базисного тривимірного сплайна (7), утвореного як добуток трьох поліномів третього порядку в кубі $[0;1]\times[0;1]\times[0;1]$ (рис.1).

$$S=\left(A_3\xi^3+A_2\xi^2+A_1\xi+\omega_0\right)\left(B_3\eta^3+B_2\eta^2+B_1\eta+\omega_0\right)\left(C_3\zeta^3+C_2\zeta^2+C_1\zeta+\omega_0\right)\frac{1}{\omega_0^2}, \text{ при } \omega_0\neq 0. \tag{7}$$

Наведемо приклад для отриманої формули 7. Для того, щоб побудувати графік поверхні за допомогою отриманого сплайна, зафіксуємо змінну ζ, і побудуємо дві поверхні при $\zeta=0$ (рис.2, а) та при $\zeta=1$ (рис.2, б).



а (графік поверхні при $\zeta=0$) б (графік поверхні при $\zeta=1$)

Рисунок 2

На рис.3 зображено задану поверхню при зміні ζ від 0 до 1.

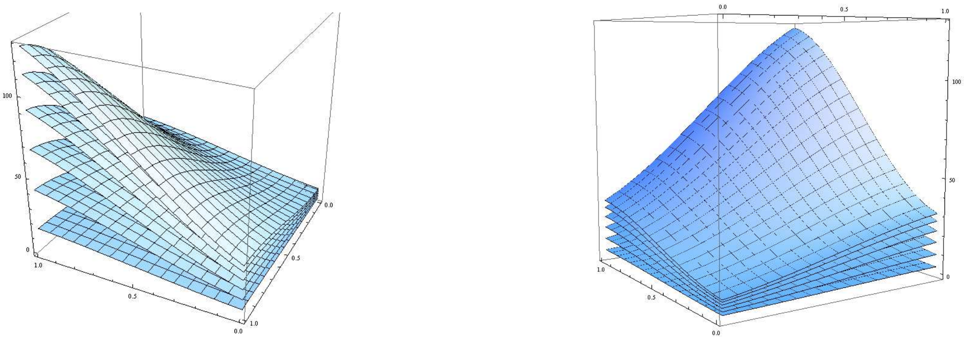


Рисунок 3

Необхідно зазначити, що утворена система (4) доцільна лише при $\omega_0\neq 0$, в протилежному випадку із системи (3) вибираються інші рівняння і, відповідно, вигляд утвореного базисного сплайна (7) зміниться. Розглянемо всі можливі випадки, при яких $\omega_0=0$:

1. $a_0=0, b_0\neq 0, c_0\neq 0$

Оскільки в системі (4) $\omega_0=\omega_2=\omega_3=\omega_{0\eta}=\omega_{0\zeta}=\omega_{2\eta}=\omega_{3\zeta}=0$, то із системи (3) вибираємо інші рівняння, в результаті утвориться система (8):

$$\begin{cases} \omega_1 = S(1,0,0) = (a_3 + a_2 + a_1) b_0 c_0 \\ \omega_4 = S(1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1 + b_0) c_0 \\ \omega_5 = S(1,0,1) = (a_3 + a_2 + a_1) b_0 (c_3 + c_2 + c_1 + c_0) \\ \omega_{0\xi} = S_\xi (0,0,0) = a_1 b_0 c_0 \\ \omega_{1\xi} = S_\xi (1,0,0) = (3a_3 + 2a_2 + a_1) b_0 c_0 \\ \omega_{1\eta} = S_\eta (1,0,0) = (a_3 + a_2 + a_1) b_1 c_0 \\ \omega_{1\zeta} = S_\zeta (1,0,0) = (a_3 + a_2 + a_1) b_0 c_1 \\ \omega_{4\eta} = S_\eta (1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1)(3b_3 + 2b_2 + b_1) c_0 \\ \omega_{5\zeta} = S_\zeta (1,0,1) = (a_3 + a_2 + a_1) b_0 (3c_3 + 2c_2 + c_1) \end{cases}. \qquad (8)$$

Розв’язуючи систему (8) за параметри візьмемо b_0, c_0. Отже із системи (8) при $\omega_1 \neq 0$ маємо:

$$a_1 = \omega_{0\xi} \cdot \frac{1}{b_0 c_0}; \qquad a_2 = \left(3\omega_1 - 2\omega_{0\xi} - \omega_{1\xi}\right) \frac{1}{b_0 c_0}; \qquad a_3 = \left(-2\omega_1 + \omega_{0\xi} + \omega_{1\xi}\right) \frac{1}{b_0 c_0};$$

$$b_1 = \omega_{1\eta} \cdot \frac{b_0}{\omega_1}; \qquad b_2 = \left(3\omega_4 - 3\omega_1 - 2\omega_{1\eta} - \omega_{4\eta}\right) \frac{b_0}{\omega_1}; \qquad b_3 = \left(-2\omega_4 + 2\omega_1 + \omega_{1\eta} + \omega_{4\eta}\right) \frac{b_0}{\omega_1}; \qquad (9)$$

$$c_1 = \omega_{1\zeta} \cdot \frac{c_0}{\omega_1}; \qquad c_2 = \left(3\omega_5 - 3\omega_1 - 2\omega_{1\zeta} - \omega_{5\zeta}\right) \frac{c_0}{\omega_1}; \qquad c_3 = \left(-2\omega_5 + 2\omega_1 + \omega_{1\zeta} + \omega_{5\zeta}\right) \frac{c_0}{\omega_1}.$$

Введемо позначення:

$$A_1^1 = \omega_{0\xi}; \qquad A_2^1 = \left(3\omega_1 - 2\omega_{0\xi} - \omega_{1\xi}\right); \qquad A_3^1 = \left(-2\omega_1 + \omega_{0\xi} + \omega_{1\xi}\right);$$

$$B_1^1 = \omega_{1\eta}; \qquad B_2^1 = \left(3\omega_4 - 3\omega_1 - 2\omega_{1\eta} - \omega_{4\eta}\right); \qquad B_3^1 = \left(-2\omega_4 + 2\omega_1 + \omega_{1\eta} + \omega_{4\eta}\right); \qquad (10)$$

$$C_1^1 = \omega_{1\zeta}; \qquad C_2^1 = \left(3\omega_5 - 3\omega_1 - 2\omega_{1\zeta} - \omega_{5\zeta}\right); \qquad C_3^1 = \left(-2\omega_5 + 2\omega_1 + \omega_{1\zeta} + \omega_{5\zeta}\right).$$

Підставимо (9) в (1), використавши позначення (10). В результаті маємо:

$$S = \left(A_3^1 \xi^3 + A_2^1 \xi^2 + A_1^1 \xi\right)\left(B_3^1 \eta^3 + B_2^1 \eta^2 + B_1^1 \eta + \omega_1\right)\left(C_3^1 \zeta^3 + C_2^1 \zeta^2 + C_1^1 \zeta + \omega_1\right) \frac{1}{\omega_1^2}, \text{ при } \omega_1 \neq 0. \qquad (11)$$

Так як $\omega_1 \neq 0$, то, відповідно до розглядуваного випадку, і $a_3 + a_2 + a_1 \neq 0$. А за умови, що $a_0 = 0, b_0 \neq 0, c_0 \neq 0$ і $a_3 + a_2 + a_1 = 0$ виразити невідомі із системи (3) неможливо.

На рис.4 зображено приклад побудови поверхні за допомогою отриманого в даному випадку тривимірного кубічного базисного сплайну (11), при при зміні ζ від 0 до 1.

2. $a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 \neq 0$

Утворюємо систему:

$$\begin{cases} \omega_4 = S(1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1) c_0 \\ \omega_7 = S(1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)(c_3 + c_2 + c_1 + c_0) \\ \omega_{1\eta} = S_\eta (1,0,0) = (a_3 + a_2 + a_1) b_1 c_0 \\ \omega_{2\xi} = S_\xi (0,1,0) = a_1 (b_3 + b_2 + b_1) c_0 \\ \omega_{4\xi} = S_\xi (1,1,0) = (3a_3 + 2a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1) c_0 \\ \omega_{4\eta} = S_\eta (1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1)(3b_3 + 2b_2 + b_1) c_0 \\ \omega_{4\zeta} = S_\zeta (1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1) c_1 \\ \omega_{7\zeta} = S_\zeta (1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)(3c_3 + 2c_2 + c_1) \end{cases}. \qquad (12)$$

Розв'язуємо систему (12) при $\omega_4 \neq 0$, a_1, b_1, c_0 – параметри.

$$a_2 = \left(3\omega_4 - 2\omega_{2\xi} - \omega_{4\xi}\right)\frac{a_1}{\omega_{2\xi}}; \qquad a_3 = \left(-2\omega_4 + \omega_{2\xi} + \omega_{4\xi}\right)\frac{a_1}{\omega_{2\xi}};$$

$$b_2 = \left(3\omega_4 - 2\omega_{1\eta} - \omega_{4\eta}\right)\frac{b_1}{\omega_{1\eta}}; \qquad b_3 = \left(-2\omega_4 + \omega_{1\eta} + \omega_{4\eta}\right)\frac{b_1}{\omega_{1\eta}}; \tag{13}$$

$$c_1 = \omega_{4\zeta}\frac{c_0}{\omega_4}; \qquad c_2 = \left(3\omega_7 - 3\omega_4 - 2\omega_{4\zeta} - \omega_{7\zeta}\right)\frac{c_0}{\omega_4}; \qquad c_3 = \left(-2\omega_7 + 2\omega_4 + \omega_{4\zeta} + \omega_{7\zeta}\right)\frac{c_0}{\omega_4}.$$

Введемо позначення:

$$\begin{array}{lll} A_1^2 = \omega_{2\xi}; & A_2^2 = \left(3\omega_4 - 2\omega_{2\xi} - \omega_{4\xi}\right); & A_3^2 = \left(-2\omega_4 + \omega_{2\xi} + \omega_{4\xi}\right); \\ B_1^2 = \omega_{1\eta}; & B_2^2 = \left(3\omega_4 - 2\omega_{1\eta} - \omega_{4\eta}\right); & B_3^2 = \left(-2\omega_4 + \omega_{1\eta} + \omega_{4\eta}\right); \\ C_1^2 = \omega_{4\zeta}; & C_2^2 = \left(3\omega_7 - 3\omega_4 - 2\omega_{4\zeta} - \omega_{7\zeta}\right); & C_3^2 = \left(-2\omega_7 + 2\omega_4 + \omega_{4\zeta} + \omega_{7\zeta}\right). \end{array} \tag{14}$$

Підставимо (13) в (1), використавши позначення (14). В результаті маємо:

$$S = \left(A_3^2\xi^3 + A_2^2\xi^2 + A_1^2\xi\right)\left(B_3^2\eta^3 + B_2^2\eta^2 + B_1^2\eta\right)\left(C_3^2\zeta^3 + C_2^2\zeta^2 + C_1^2\zeta + \omega_4\right)\frac{1}{\omega_4^2}, \text{ при } \omega_4 \neq 0. \tag{15}$$

Тобто даний випадок можливий, коли $(a_3 + a_2 + a_1) \neq 0$ і $(b_3 + b_2 + b_1) \neq 0$, якщо ж $a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 \neq 0$ і $(a_3 + a_2 + a_1) = 0$ або $(b_3 + b_2 + b_1) = 0$, систему (3) розв'язати неможна.

На рис.5 зображено приклад побудови поверхні за допомогою отриманого в даному випадку тривимірного кубічного базисного сплайну (15), при зміні ζ від 0 до 1.

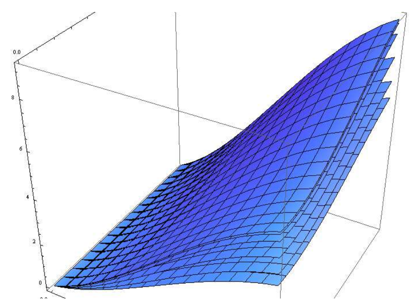


Рисунок 4

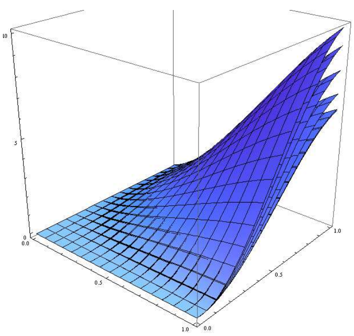


Рисунок 5

3. $a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 = 0$

В цьому випадку маємо наступну систему рівнянь, оскільки всі інші рівняння системи (3) дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \omega_7 = S(1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)(c_3 + c_2 + c_1) \\ \omega_{4\zeta} = S_\zeta(1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)c_1 \\ \omega_{5\eta} = S_\eta(1,0,1) = (a_3 + a_2 + a_1)b_1(c_3 + c_2 + c_1) \\ \omega_{6\xi} = S_\xi(0,1,1) = a_1(b_3 + b_2 + b_1)(c_3 + c_2 + c_1) \\ \omega_{7\xi} = S_\xi(1,1,1) = (3a_3 + 2a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)(c_3 + c_2 + c_1) \\ \omega_{7\eta} = S_\eta(1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1)(3b_3 + 2b_2 + b_1)(c_3 + c_2 + c_1) \\ \omega_{7\zeta} = S_\zeta(1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)(3c_3 + 2c_2 + c_1) \end{cases}. \tag{16}$$

Розв'язавши систему (16) при $\omega_7 \neq 0$, прийнявши за параметри a_1, b_1, c_1, маємо:

$$a_2=\left(3\omega_7-2\omega_{6\xi}-\omega_{7\xi}\right)\frac{a_1}{\omega_{6\xi}}; \qquad a_3=\left(-2\omega_7+\omega_{6\xi}+\omega_{7\xi}\right)\frac{a_1}{\omega_{6\xi}};$$
$$b_2=\left(3\omega_7-2\omega_{5\eta}-\omega_{7\eta}\right)\frac{b_1}{\omega_{5\eta}}; \qquad b_3=\left(-2\omega_7+\omega_{5\eta}+\omega_{7\eta}\right)\frac{b_1}{\omega_{5\eta}}; \qquad (17)$$
$$c_2=\left(3\omega_7-2\omega_{4\zeta}-\omega_{7\zeta}\right)\frac{c_1}{\omega_{4\zeta}}; \qquad c_3=\left(-2\omega_7+\omega_{4\zeta}+\omega_{7\zeta}\right)\frac{c_1}{\omega_{4\zeta}}.$$

Введемо позначення:

$$A_1^3=\omega_{6\xi};\quad A_2^3=\left(3\omega_7-2\omega_{6\xi}-\omega_{7\xi}\right); \qquad A_3^3=\left(-2\omega_7+\omega_{6\xi}+\omega_{7\xi}\right);$$
$$B_1^3=\omega_{5\eta};\quad B_2^3=\left(3\omega_7-2\omega_{5\eta}-\omega_{7\eta}\right); \qquad B_3^3=\left(-2\omega_7+\omega_{5\eta}+\omega_{7\eta}\right); \qquad (18)$$
$$C_1^3=\omega_{4\zeta};\quad C_2^3=\left(3\omega_7-2\omega_{4\zeta}-\omega_{7\zeta}\right); \qquad C_3^3=\left(-2\omega_7+\omega_{4\zeta}+\omega_{7\zeta}\right).$$

Підставимо (17) в (1), використавши позначення (18). В результаті маємо:

$$S=\left(A_3^3\xi^3+A_2^3\xi^2+A_1^3\xi\right)\left(B_3^3\eta^3+B_2^3\eta^2+B_1^3\eta\right)\left(C_3^3\zeta^3+C_2^3\zeta^2+C_1^3\zeta\right)\frac{1}{\omega_7^2}, \text{ при } \omega_7\neq 0. \qquad (19)$$

Наведемо приклад побудованої поверхні за допомогою сплайну (19) у третьому випадку (рис.6) при зміні ζ від 0 до 1.

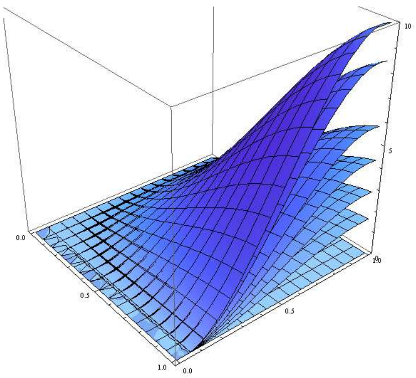


Рисунок 6

Зауважимо, що даний випадок можливий, коли $(a_3+a_2+a_1)\neq 0$ і $(b_3+b_2+b_1)\neq 0$, і $(c_3+c_2+c_1)\neq 0$, якщо ж $a_0=0, b_0=0, c_0=0$ і $(a_3+a_2+a_1)=0$, або $(b_3+b_2+b_1)=0$, або $(c_3+c_2+c_1)=0$, систему (3) розв'язати неможна.

Обговорення результатів. Представлений вище тривимірний базисний сплайн є нескладним в застосуванні при розв'язуванні задач математичного моделювання і, як свідчать деякі проведені дослідження, дають високу точність. До кожного розглянутого випадку додаються приклади побудови сплайнової поверхні. При чому, як можна побачити з наведених прикладів, в кожному випадку отримується частина базисного сплайну розміщена в одному з чотирьох різнотипних кубиків, поданого куба на рис.1. Необхідно зазначити, що побудова здійснювалась з розрахунку на те, що одна зі змінних є константою, але такою, що належить проміжку [0;1], і, якщо її змінювати від 0 до 1, то будуть отримуватись еквівалентні поверхні, але "видовжені" або "стиснуті", це можна спостерігати на малюнках 3-6, де ζ набуває кількох різних значень, а саме $\{0; 0{,}2; 0{,}4; 0{,}6; 0{,}8; 1\}$.

Оскільки побудований сплайн є залежним від трьох змінних то, щоб отримати повний графік даної сплайнової поверхні, його побудову слід здійснювати в чотирьохвимірному просторі, зважаючи на це на рис.2-6 подано зображення поверхні сплайну в різних просторових перетинах.

Висновки. Було побудовано тривимірний базисний сплайн як добуток трьох поліномів третього порядку, а також розглянуть випадки побудови сплайну в залежності від наявності вільного коефіцієнта в кожному із многочленів і , до кожного випадку подано приклади побудови поверхні сплайну, при зафіксованій одній із змінних, тобто дано різні зображення поверхні сплайну в різних просторових перетинах.

Даний базисний сплайн можна застосовувати при розв'язуванні інтерполяційних задач та задач математичного моделювання, при дослідженні різноманітних поверхонь та для прогнозування їх форми. Причому побудований базисний сплайн не є громіздким, займаючи небагато машинного часу під час обрахунків, і його використання дає високу точність при розрахунках, що є важливим для розв'язування різноманітних задач інтерполяції та задач математичного моделювання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ашкеназы В.О. Сплайн-поверхности. Основы теории и вычислительные алгоритмы: учебное пособие / Ашкеназы В.О. – Тверь: Тверской гос. ун-т, 2003. – 82с.
2. Зеленский А.С. Оконтуривание рудных тел с использованием B-сплайнов / А.С.Зеленский, С.С.Пуханов, Т.А.Подойницына // Вісник КТУ. – К. – 2011. – Вип. 27. – С.3-5.
3. Приставка П.О. Дослідження двовимірного сплайна на основі *B*-сплайнів п'ятого порядку / П.О.Приставка, О.Г.Чолишкіна // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: зб. наук. праць. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. – 2008. – Т. 12. – С.14-27.
4. Стеблянко П.А. Применение двухмерного кубического сплайна для описания геометрических объектов / Стеблянко П.А. // Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2006. – Вип. 3 (44). – С.107-111.
5. Стеблянко П.О. Аналіз обчислювальної ефективності наближених методів при дослідженні нестаціонарного напружено-деформованого стану тіл з використанням двомірних сплайнів / Стеблянко П.О. // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла: Збірник наукових праць ДНУ. – Дніпропетровськ. – 2005. – Вип.7. – С.73-87.
6. Стеблянко П.О. Застосування двовимірного напруженого сплайну в задачах механіки / П.О. Стеблянко // Системні технології: регіональній міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2006. – Вип. 5(46). – С.17-26.
7. Стеблянко П.О. Побудова та аналіз стикування поверхонь, побудованих за допомогою двовимірних сплайн-функцій / П.О.Стеблянко, Т.В.Кравчук // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки): тематичний випуск «Математичні проблеми технічної механіки». – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2013. – Вип. 2 (22). – С.75-82.

Надійшла до редколегії 09.04.2014

УДК 539.3

ПЕТРОВ А.Д.

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Введение. При эксплуатации конструкций очень большое влияние на их поведение может оказывать температура, поэтому определение термо-напряженного состояния достаточно важно. Нахождение термо-напряженного состояния в элементах конструкций в большинстве случаев представляет сложную и трудоемкую задачу. Это связано с влиянием на температурное состояние тела сложного, в том числе и циклического нагружения, когда в нем могут возникнуть и развиваться пластические деформации. Существующие численные методы, которые используются в таких задачах, приводят, как правило, к большим вычислительным трудностям, которые обусловлены решением больших систем алгебраических уравнений. В связи с этим рационально прибегать к