задач та задач математичного моделювання, при дослідженні різноманітних поверхонь та для прогнозування їх форми. Причому побудований базисний сплайн не є громіздким, займаючи небагато машинного часу під час обрахунків, і його використання дає високу точність при розрахунках, що є важливим для розв'язування різноманітних задач інтерполяції та задач математичного моделювання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ашкеназы В.О. Сплайн-поверхности. Основы теории и вычислительные алгоритмы: учебное пособие / Ашкеназы В.О. – Тверь: Тверской гос. ун-т, 2003. – 82с.
2. Зеленский А.С. Оконтуривание рудных тел с использованием В-сплайнов / А.С.Зеленский, С.С.Пуханов, Т.А.Подойницына // Вісник КТУ. – К. – 2011. – Вип. 27. – С.3-5.
3. Приставка П.О. Дослідження двовимірного сплайна на основі *B*-сплайнів п'ятого порядку / П.О.Приставка, О.Г.Чолишкіна // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: зб. наук. праць. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. – 2008. – Т. 12. – С.14-27.
4. Стеблянко П.А. Применение двухмерного кубического сплайна для описания геометрических объектов / Стеблянко П.А. // Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2006. – Вип. 3 (44). – С.107-111.
5. Стеблянко П.О. Аналіз обчислювальної ефективності наближених методів при дослідженні нестаціонарного напружено-деформованого стану тіл з використанням двомірних сплайнів / Стеблянко П.О. // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла: Збірник наукових праць ДНУ. – Дніпропетровськ. – 2005. – Вип.7. – С.73-87.
6. Стеблянко П.О. Застосування двовимірного напруженого сплайну в задачах механіки / П.О. Стеблянко // Системні технології: регіональній міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2006. – Вип. 5(46). – С.17-26.
7. Стеблянко П.О. Побудова та аналіз стикування поверхонь, побудованих за допомогою двовимірних сплайн-функцій / П.О.Стеблянко, Т.В.Кравчук // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки): тематичний випуск «Математичні проблеми технічної механіки». – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2013. – Вип. 2 (22). – С.75-82.

Надійшла до редколегії 09.04.2014

УДК 539.3

ПЕТРОВ А.Д.

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Введение. При эксплуатации конструкций очень большое влияние на их поведение может оказывать температура, поэтому определение термо-напряженного состояния достаточно важно. Нахождение термо-напряженного состояния в элементах конструкций в большинстве случаев представляет сложную и трудоемкую задачу. Это связано с влиянием на температурное состояние тела сложного, в том числе и циклического нагружения, когда в нем могут возникнуть и развиваться пластические деформации. Существующие численные методы, которые используются в таких задачах, приводят, как правило, к большим вычислительным трудностям, которые обусловлены решением больших систем алгебраических уравнений. В связи с этим рационально прибегать к программным комплексам, позволяющим быстро решать большие объемы вычислений. В этой работе представлен комплекс ANSYS, использующий для вычислений метод конечных элементов.

Постановка задачи. Рассматривается квадратная пластинка со стороной a, которая ослаблена круговым отверстием радиуса R. Пластинка находится под действием растягивающих усилий интенсивности (рис.1) и температурного поля *T*. Массовыми силами пренебрегаем. Нужно определить влияние температуры на напряженно-деформированное состояние пластинки, которая находится в рамках пластичности.

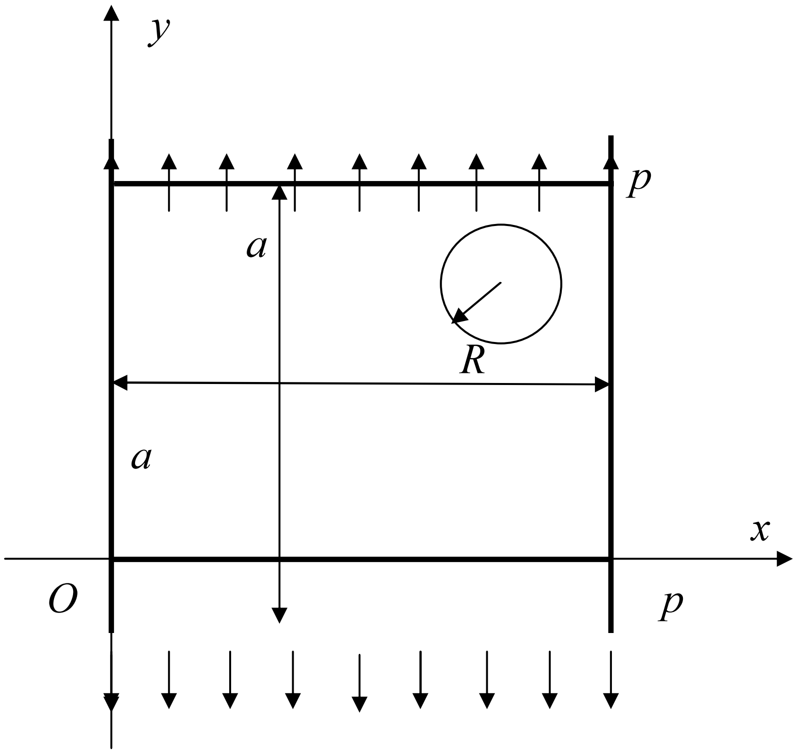

Рисунок 1 – Квадратная пластинка с круговым отверстием

Рассматриваются два случая, которые отличаются температурой на внутреннем контуре. В первом случае *T = 300* градусов Кельвина, во втором -*500*. Для расчета было использовано нелинейное изотропическое мультилинейное укрепление по Мизесу. Пластина зготовлена из материала сталь 20. Длина пластины *a=20см,* радиус отверстия *R=2см*, координаты центра отверстия (14,14). Участки пластичности задаются в виде таблицы (табл.1).

Расчетные формулы. Кусочно-линейная аппроксимация диаграммы материала на отрезках $\varepsilon_u \in [\varepsilon_{n-1};\varepsilon_n]$, $\sigma_u \in [\sigma_{n-1};\sigma_n]$ имеет вид $\sigma_u = K_n\varepsilon_u + b_n$; $n = 1;2;...N$,

где $K_n = \dfrac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}$; $b_n = \sigma_{n-1} - K_n\varepsilon_{n-1}$.

Пластическая деформация на каждом участке рассчитывется так $(\varepsilon_p)_n = \varepsilon_n - \dfrac{\sigma_n}{K_1}$.

Коэффициент пропорциональности на первом участке тождественно равен модулю Юнга $K_1 \equiv E$.

Основная идея метода конечных элементов состоит в том, что любую непрерывную величину (перемещение, температура, давление и т. п.) можно аппроксимировать моделью, состоящей из отдельных элементов (участков). На каждом из этих элементов исследуемая непрерывная величина аппроксимируется кусочно-непрерывной функцией, которая строится на значениях исследуемой непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемого элемента.

Таблица 1

n	*T=273*					*T=473*				
	ε_u	σ_u	K_n	$в_n$	ε_p	ε_u	σ_u	K_n	$в_n$	ε_p
0	0	0	203,125	0		0	0	187,5	0	
1	0,00064	0,13	202,6786	0,000286	0	0,00064	0,12	185,7143	0,001143	0
2	0,0012	0,2435	202,5	0,0005	1,23E-06	0,0012	0,224	126,6667	0,072	5,33E-06
3	0,0018	0,365	8,888889	0,3245	3,08E-06	0,0018	0,3	16,25	0,27075	0,0002
4	0,0026	0,383	1,639344	0,359889	0,000714	0,0026	0,313	5,185185	0,299519	0,000931
5	0,00395	0,395	0	0,388525	0,002005	0,00395	0,32	4,918033	0,300574	0,002243
6	0,007	0,4	0	0,4	0,005031	0,007	0,335	3,666667	0,309333	0,005213
7	0,01	0,4	0	0,4	0,008031	0,01	0,346	5,8	0,288	0,008155
8	0,015	0,4	0	0,4	0,013031	0,015	0,375	7,6	0,261	0,013
9	0,02	0,4	0	0,4	0,018031	0,02	0,413	7,6	0,261	0,017797
10	0,06	0,4				0,06	0,717			

Математическая постановка. Так как пластинка находится в условиях плоского напряженного состояния математически сформулированная выше задача может быть сведена к определению компонентов напряженно-деформированного состояния пластинки u_x, u_y, ε_x, ε_y, ε_{xy}, σ_x, σ_y, τ_{xy} из следующей системы дифференциальных уравнений:

1) уравнения равновесия $\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0$, (1)

2) соотношения Коши $\varepsilon_x=\dfrac{\partial u_x}{\partial x}$, $\varepsilon_y=\dfrac{\partial u_y}{\partial y}$, $\varepsilon_{xy}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y}+\dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right)$, (2)

3) соотношения закона Гука $\sigma_x=\dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y\right)$, $\sigma_y=\dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x\right)$, (3)

$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy},\qquad \varepsilon_z=-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right).$$

Граничные условия: в левом нижнем углу пластины запрещены все перемещения по ОУ. Температура во всем теле равна нулю, кроме внутреннего контура (там она задается отдельно).

Метод решения. Алгоритм решения задачи по МКЭ. Воспользуемся методом конечных элементов в форме метода перемещений. В этом случае последовательность проведения расчета по МКЭ:

1. Разбиение тела на конечные элементы и назначение узлов, в которых определяется перемещение.
2. Построение матрицы жесткости.
3. Составление и решение системы алгебраических уравнений.
4. Определение напряженно-деформированного состояния тела.

Вырождение четырехугольных элементов в треугольные. При построении сеток конечных элементов часто бывает выгодно вместо четырехугольных элементов использовать несколько треугольных. При вырождении четырехугольных элементов в треугольные, одна из сторон четырехугольника стягивается в точку (рис.2).

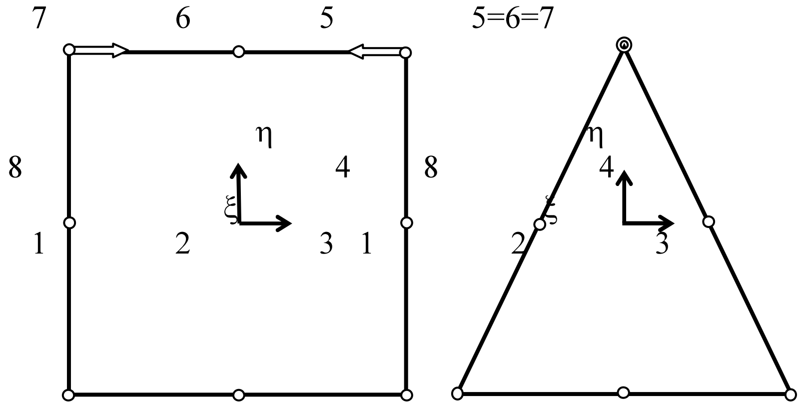

Рисунок 2 – Вырождение четырехугольных элементов в треугольные

При этом должны быть изменены функции формы (2.3), (2.4). Пусть в точку стягивается сторона 5-6-7 элемента, изображенного на рис.2. Тогда должны быть модифицированы функции N_1, N_2, N_3, N_5, которые для вырожденного элемента обозначены звездочкой: $N_1^* = N_1 + \Delta N$, $N_2^* = N_2 - 2\Delta N$, $N_3^* = N_3 + \Delta N$, $N_5^* = N_5 + N_6 + +N_7$, где $\Delta N = \frac{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}{8}$. Пластина разбита 374 узлами, стороны разбиты 19 узлами, на внутреннем контуре 40 узлов. Пластина разбита базовым изопараметрическим четырехугольным элементом Solid 182, который может выродиться в треугольный. При численном решении МКЭ стороны пластины разбивались на 25 элементов.

В результате численного решения были получены графики зависимостей компонент тензоров остаточных напряжений (S11,S22,S12) и пластических деформаций (PE11,PE22,PE12), зависящих от температуры, вдоль оси X, а также распределение остаточных напряжений (рис.3-5).

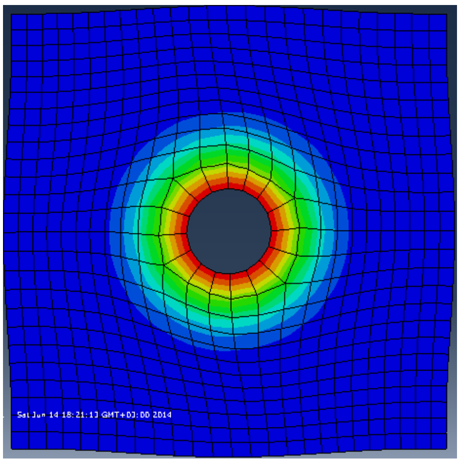

Рисунок 3 – Распределение температуры в пластине

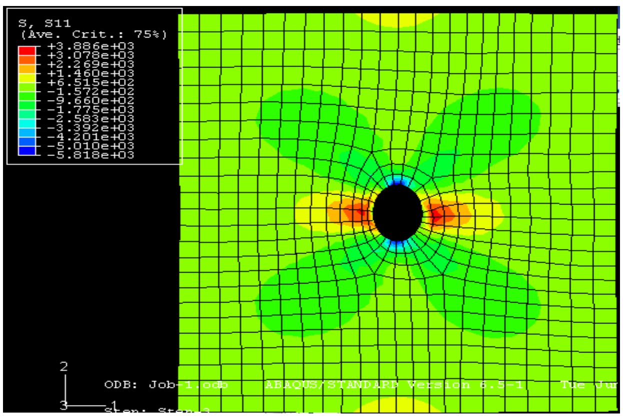

Рисунок 4 – Распределение остаточных напряжений в пластине

Выводы. Для построения решения повышенной точности уравнения теплопроводности и полной системы уравнений механики деформируемого твердого тела можно воспользоваться сплайнами [2, 3]. Все неизвестные величины представляются в виде сплайн-функций (использовались как кубические В-сплайны, так и напряженные сплайны). Применение аппарата сплайн-функций дает возможность записать более точные разностные выражения для дифференциальных операторов, входящих в состав схем

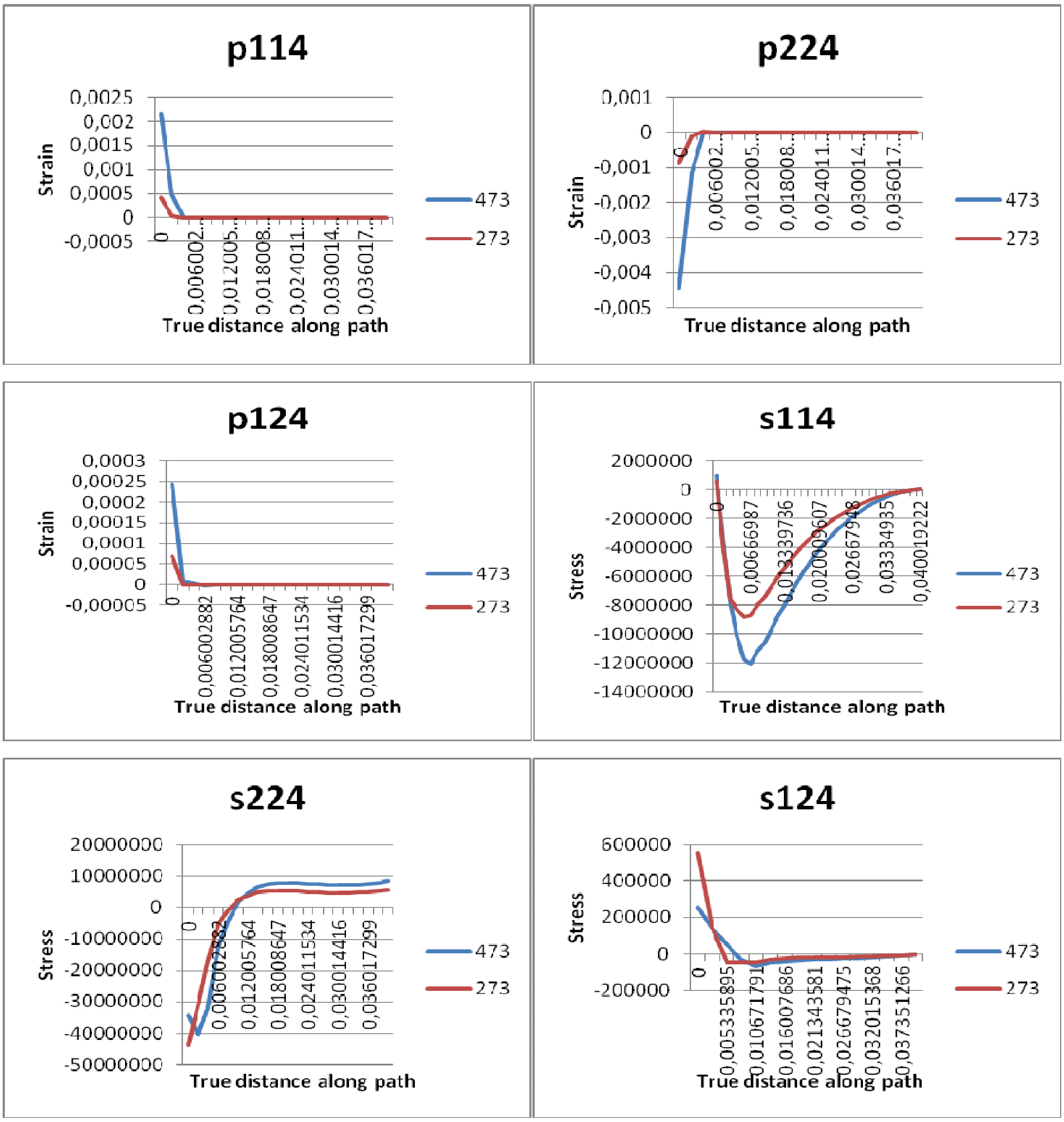

Рисунок 5 – Распределение остаточных напряжений и деформаций вдоль оси *X*

расщепления. Это позволяет в целом повысить, как минимум на порядок, точность вычислений по координатам.

При условии соблюдения одинаковой точности вычислений с классическим конечно-разностным методом данный метод позволяет быстрее получать результаты в силу выбора более крупных шагов интегрирования по координатам, что приводит к существенному уменьшению количества используемых узлов пространственной сетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М.: Наука, 1980. – 352с.
2. Марчук Г.И. Методы расщепления / Марчук Г.И. – Москва: Наука, 1988. – 263с.
3. Стеблянко П.А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности / Стеблянко П.А. – Киев: Наукова думка, 1998. – 304с.

4. Шевченко Ю.Н. Вычислительные методы в стационарных и нестационарных задачах теории термопластичности / Шевченко Ю.Н., Стеблянко П.А. // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2012. – Випуск 18. – С.211-226.
5. Шевченко Ю.Н. Физические уравнения термовязкопластичности / Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г. – К.: Наукова думка, 1982. – 238с.
6. Шевченко Ю.Н. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2. Термовязкопластичность / Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. – Киев: Наукова думка,1987. – 264с.
7. Шевченко Ю.Н. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. – К.: Наукова думка, 1992. – 328с.
8. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Яненко Н.Н. – Новосибирск: Наука, 1967. – 195с.

Надійшла до редколегії 29.03.2014.

УДК 539.3

ДЗЮБА В.А., аспірантка
СТЕБЛЯНКО П.О., д.фіз.-мат.н., професор

Дніпродзержинський державний технічний університет

ПОБУДОВА МЕТОДУ ПІДВИЩЕНОЇ ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ НА ОСНОВІ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ

Вступ. Актуальність дослідження. Оболонки широко використовуються у різноманітних галузях техніки. У зв'язку з великою різноманітністю оболонок достатньо важко визначити єдиний спосіб їх розрахунку, оскільки кожний вид оболонок потребує окремого підходу. Якщо елементи конструкції виконані у вигляді циліндричних оболонок, то умови використання цих елементів, та відповідно, їх розрахунків тісно пов'язані з урахуванням довільного поперечного перерізу. Зміна товщини та форми поперечного перерізу оболонок описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами.

Останнім часом вийшла велика кількість публікацій по даній темі. Зокрема, отримані нові результати в цьому достатньо актуальному напрямі можна знайти в роботах Григоренка Я.М., Григоренка А.Я., Влайкова Г.Г., Тимошенка С.П., Василенка А.Т., Стеблянка П.О., Кільчевського М.О., Лур'є А.І., Муштарі Х.М. та ін. [2, 5]. Інженерний напрямок дослідження пластин і оболонок належить В.З.Власову [1]. Для забезпечення нормальної роботи конструкція повинна задовольняти необхідні умови міцності, жорсткості, стійкості, оскільки вони відіграють найважливішу роль у процесі створення новітніх конструкцій. Варто відмітити, що застосування сучасних методів досліджень напружено-деформованого стану [7] (варіаційні методи, реалізовані на ЕМО) дозволяє розглядати теорію оболонок з позиції узагальненої тривимірної задачі теорії пружності. Такий підхід не потребує введення додаткових гіпотез (прямих нормалей, відсутності поперечного тиск тощо), але натомість пов'язаний з великим об'ємом інформації, що потребує опрацювання.

На сучасному етапі розвитку теорії оболонок постає необхідність до пошуку нових підходів під час експлуатації споруджень, машин їхні елементи схильні до дії різних