4. Шевченко Ю.Н. Вычислительные методы в стационарных и нестационарных задачах теории термопластичности / Шевченко Ю.Н., Стеблянко П.А. // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2012. – Випуск 18. – С.211-226.
5. Шевченко Ю.Н. Физические уравнения термовязкопластичности / Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г. – К.: Наукова думка, 1982. – 238с.
6. Шевченко Ю.Н. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2. Термовязкопластичность / Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. – Киев: Наукова думка,1987. – 264с.
7. Шевченко Ю.Н. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. – К.: Наукова думка, 1992. – 328с.
8. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Яненко Н.Н. – Новосибирск: Наука, 1967. – 195с.

Надійшла до редколегії 29.03.2014.

УДК 539.3

ДЗЮБА В.А., аспірантка
СТЕБЛЯНКО П.О., д.фіз.-мат.н., професор

Дніпродзержинський державний технічний університет

ПОБУДОВА МЕТОДУ ПІДВИЩЕНОЇ ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ НА ОСНОВІ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ

Вступ. Актуальність дослідження. Оболонки широко використовуються у різноманітних галузях техніки. У зв'язку з великою різноманітністю оболонок достатньо важко визначити єдиний спосіб їх розрахунку, оскільки кожний вид оболонок потребує окремого підходу. Якщо елементи конструкції виконані у вигляді циліндричних оболонок, то умови використання цих елементів, та відповідно, їх розрахунків тісно пов'язані з урахуванням довільного поперечного перерізу. Зміна товщини та форми поперечного перерізу оболонок описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами.

Останнім часом вийшла велика кількість публікацій по даній темі. Зокрема, отримані нові результати в цьому достатньо актуальному напрямі можна знайти в роботах Григоренка Я.М., Григоренка А.Я., Влайкова Г.Г., Тимошенка С.П., Василенка А.Т., Стеблянка П.О., Кільчевського М.О., Лур'є А.І., Муштарі Х.М. та ін. [2, 5]. Інженерний напрямок дослідження пластин і оболонок належить В.З.Власову [1]. Для забезпечення нормальної роботи конструкція повинна задовольняти необхідні умови міцності, жорсткості, стійкості, оскільки вони відіграють найважливішу роль у процесі створення новітніх конструкцій. Варто відмітити, що застосування сучасних методів досліджень напружено-деформованого стану [7] (варіаційні методи, реалізовані на ЕМО) дозволяє розглядати теорію оболонок з позиції узагальненої тривимірної задачі теорії пружності. Такий підхід не потребує введення додаткових гіпотез (прямих нормалей, відсутності поперечного тиск тощо), але натомість пов'язаний з великим об'ємом інформації, що потребує опрацювання.

На сучасному етапі розвитку теорії оболонок постає необхідність до пошуку нових підходів під час експлуатації споруджень, машин їхні елементи схильні до дії різних за природою сил.

Аналіз відомих методів обчислень показує необхідність формування загального підходу до розрахунку циліндричних оболонок змінної товщини [4, 6], який дав би змогу і створив умови для широкого використання. Тобто виникає необхідність до розв'язання задач у просторовій постановці. При цьому з'являються математичні та обчислювальні труднощі при виконанні граничних умов з достатньою точністю. Описані проблеми, які з'явилися на новітньому шляху розвитку є наслідком недостатньо розробленого методичного апарату для розрахунку оболонок.

Методи розрахунку циліндричних оболонок здобувають велику популярність у сучасній науці та техніці. При обчисленні оболонок вкрай актуальною задачею є отримання ефективного методу обчислення. Особливо важливо, щоб цей метод був якомога точніше та відповідав усім поставленим умовам. У зв'язку з цим в статті запропоновані наближені (ітераційні) методи розв'язання задач теорії оболонок для циліндричних тіл на основі методу Зейделя.

Постановка задачі. Розглядається напружено-деформований стан навантаженої циліндричної оболонки кругового поперечного перерізу радіусу R у серединній поверхні. У формулюванні допускається, що товщина оболонки може змінюватись. Ключовими невідомими даної задачі є: U,V,W – переміщення за твірною, направляючою та нормаллю до серединної поверхні. Метою роботи є розробка ефективного методу розрахунку підвищеної точності вище описаних систем. Пропонується дослідити наступну систему рівнянь:

1. $\dfrac{\partial U}{\partial x}=-\dfrac{W}{R_1}+\varepsilon_1$; 2. $\dfrac{\partial V}{\partial x}=-\dfrac{\partial U}{\partial y}+\varepsilon_{12}$; 3. $\dfrac{\partial W}{\partial x}=W'$; 4. $\dfrac{\partial W'}{\partial x}=-\chi_1$;

5. $\dfrac{\partial N_1}{\partial x}=-\dfrac{\partial S}{\partial y}$; 6. $\dfrac{\partial S}{\partial x}=-\dfrac{\partial N_2}{\partial y}$; 7. $\dfrac{\partial M_1}{\partial x}=-\dfrac{\partial H}{\partial y}+Q_1$;

8. $\dfrac{\partial H}{\partial x}=H'$; 9. $\dfrac{\partial Q_1}{\partial x}=-\dfrac{\partial Q_2}{\partial y}+\dfrac{N_2}{R_2}-q_z$; 10. $H'=2\dfrac{\partial D_{66}}{\partial x}\chi_{12}+2D_{66}\dfrac{\partial \chi_1}{\partial y}$;

11. $N_2=c_{12}\varepsilon_1+c_{22}\varepsilon_2$; 12. $M_2=D_{12}\chi_1+D_{22}\chi_2$; 13. $Q_2=H'+\dfrac{\partial M_2}{\partial y}$;

14. $\varepsilon_1=\dfrac{1}{c_{11}}\left(N_1-c_{12}\varepsilon_2\right)$; 15. $\varepsilon_2=\dfrac{\partial V}{\partial y}+\dfrac{W}{R_2}$; 16. $\varepsilon_{12}=\dfrac{S}{c_{66}}$

17. $\chi_1=\dfrac{1}{D_{11}}\left(M_1-D_{11}\chi_2\right)$; 18. $\chi_2=-\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}$; 19. $\chi_{12}=-\dfrac{\partial W'}{\partial y}$.

Теорія розрахунку представлена в даній роботі будується на основі ґрунтовного аналізу поставленої задачі, із врахуванням крайових умов, властивостей оболонки, що знаходиться під дією навантаження, та разом з цим здатна зберігати початкові дані (на практиці – експлуатаційні якості). Даний метод базується на використанні кінцево-різницевих апроксимацій похідних. Метод розрахунку зводиться до розв'язання СЛАР із використанням ітераційних методів, а саме методу Зейделя.

Матеріали і результати дослідження. У статті [3] розроблено новий підхід для розв'язання вище наведених систем із використанням методу Зейделя, отримані явні розрахункові формули. У випадку незастосовності даного методу, необхідно розглянути загальну систему рівнянь (1)-(19) яка складається із диференціальних (1)-(9) та алгебраїчних (10)-(19) рівнянь. Загальний принцип розв’язку такий: спочатку знаходимо розв’язок диференціальних рівнянь, а саме – здійснюючи перехід від неперервної до дискретної задачі заміною похідних по координаті y різницевими співвідношеннями. На кожній ітерації знаходимо значення по вже відомим із алгебраїчної системи, оскільки в правій частині розташована попередня ітерація в лівій наступна. Розв’язок системи рівнянь (1)-(19) передбачає наступні етапи:

1. Нульова ітерація $i=0$, оболонка (пластинка) не навантажена, маємо тривіальний розв’язок у всьому полі $Y \equiv 0$.
2. Знаходимо значення змінних χ_{12} з (19), χ_2 з (18), ε_{12} з (16), ε_2 з (15).
3. Знаходимо χ_1 із (17) та ε_1 з (14).
4. Знаходимо M_2 з (12), N_2 з (11), H' з (10).
5. Знаходимо Q_2 з (13).
6. Простим інтегруванням знаходимо змінні рівнянь (1)-(9), а саме на даному етапі – H, W, W', S, Q_1 із рівнянь (8), (3), (4), (6), (9).
7. Знаходимо N_1, $\grave{I}_1$, U із рівнянь (5), (7), (1).
8. Знаходимо V із рівняння (2).

Для підтвердження роботи запропонованого підходу наведений конкретний приклад розв’язок якого з легкістю можна обчислити вручну.

Введемо до розгляду найпростішу функцію, задану таблично (по точках $N=5$)

$$y' = \cos(\pi x), \quad y(x_0) = a. \tag{1}$$

Візьмемо $h = 0,2$, $x_i = h \cdot i$, $i = \overline{0, N}$, матимемо $x_i = [0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1]$.

$$\begin{aligned}
f_0 &= f(x_0) = \cos 0 = 1 \\
f_1 &= f(x_1) = \cos(0,2\pi) = 0,80901699437 \\
f_2 &= f(x_2) = \cos(0,4\pi) = 0,30901699437 \\
f_3 &= f(x_3) = \cos(0,6\pi) = -0,30901699437 \\
f_4 &= f(x_4) = \cos(0,8\pi) = -0,80901699437 \\
f_N &= f(x_5) = \cos(\pi) = -1
\end{aligned}.$$

Запишемо формули апроксимації для y', перше рівняння замінимо граничною умовою $y_0 = a$ (для зручності міркувань вважатимемо $a = 1$)

$$\begin{aligned}
&y_0 = a, \\
&y_2 - y_0 = 2hf_1 \\
&y_3 - y_1 = 2hf_2 \\
&y_4 - y_2 = 2hf_3. \\
&y_5 - y_3 = 2hf_4 \\
&y_5 - y_4 = hf_5
\end{aligned} \tag{2}$$

Застосуємо метод Зейделя для системи (2), запишемо матрицю A цієї системи

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виділимо головний елемент в рядку для цього виконаємо елементарні перетворення над матрицею A і в результаті матимемо:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо ітераційну схему на основі отриманої матриці:

$$\begin{aligned}
&(y_1)_{k+1}=hf_0+(y_0)_k\\
&(y_2)_{k+1}=2hf_1+(y_0)_k\\
&(y_3)_{k+1}=2hf_2+(y_1)_k\\
&(y_4)_{k+1}=2hf_3+(y_2)_k\\
&(y_5)_{k+1}=2hf_4+(y_3)_k\\
&(y_0)_{k+1}=h(f_5-f_0)+(y_1)_k+(y_4)_k-(y_5)_k
\end{aligned}$$

Дана ітераційна схема при кількості ітерацій $k=4$ дає можливість отримати наближений розв'язок. Занесемо отримані розв'язки до табл.1 з метою проведення оцінки відхилення від точного розв'язку.

Таблиця 1

Наближений розв'язок	Метод Зейделя	Відхилення, %	Точний розв'язок
$y_0=1$	$y_0=1$	0%	$y_0=1$
$y_1=1,200000001$	$y_1=1,2$	1,1%	$y_1=1,18709785676$
$y_2=1,323606798$	$y_2=1,3236068$	1,6%	$y_2=1,30273069146$
$y_3=1,323606798$	$y_3=1,323606806$	1,6%	$y_3=1,30273069146$
$y_4=1,2$	$y_4=1,200000015$	1,1%	$y_4=1,18709785676$
$y_5=1$	$y_5=1,000000018$	0%	$y_5=1$

Порівняльний аналіз отриманих результатів подано на рис.1.

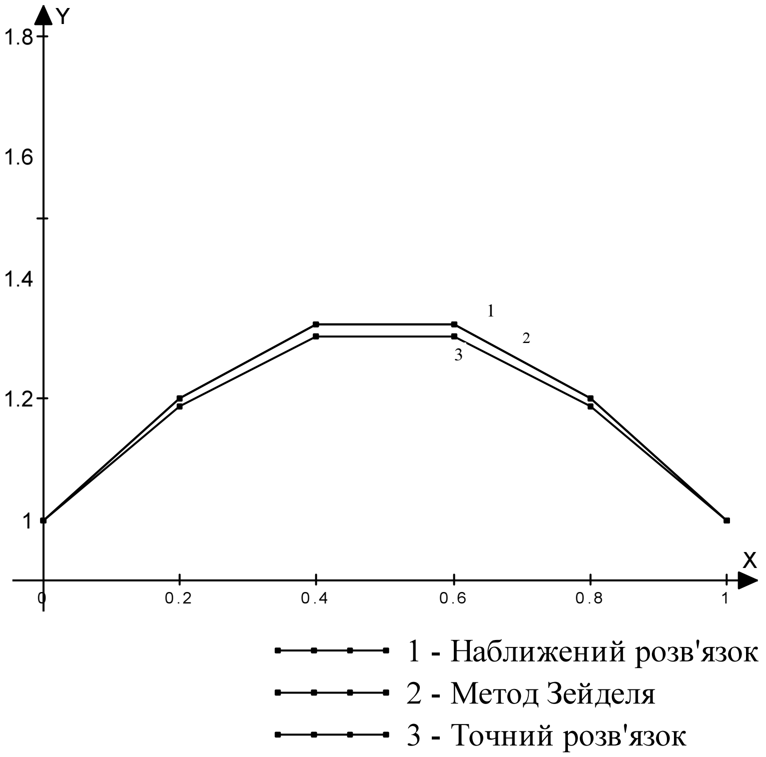

Рисунок 1

Порівнюючи отриманий методом Зейделя, наближений та точний розв'язок і оцінюючи похибку відхилення наближеного від точного розв'язку, можна стверджувати, що в середньому похибка складає не більше 1% . Відхилення розв'язку, отриманого методом Зейделя від наближеного розв'язку є незначним. Даний метод є ефективний для задач механіки, оскільки дає змогу з підвищеною точністю обчислень переважну більшість задач звести до розв'язання СЛАР.

Пропонується новий підхід для покращення збіжності методу Зейделя, а саме – по-іншому апроксимувати похідну із використанням коефіцієнтів α та за рахунок роботи над матрицею системи.

$$y_i' = \sum_{\alpha=A}^{F} \alpha_i (y_i')_{A,B,C,D,E,F}\text{, де } \alpha_i \geq 0 \text{ та } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 1.$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} & A_{68} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{75} & A_{76} & A_{77} & A_{78} & A_{79} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{86} & A_{87} & A_{88} & A_{89} & A_{8\times 10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{97} & A_{98} & A_{99} & A_{9\times 10} & A_{9\times 11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{10\times 7} & A_{10\times 8} & A_{10\times 9} & A_{10\times 10} & A_{10\times 11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11\times 7} & A_{11\times 8} & A_{11\times 9} & A_{11\times 10} & A_{11\times 11} \end{pmatrix}.$$

$A_{11} = 8(12\alpha_1 + 6\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4)$, $A_{12} = -12\alpha_1$, $A_{13} = -6\alpha_2$, $A_{14} = -4\alpha_3$, $A_{15} = -3\alpha_4$.
$A_{21} = 6\alpha_1 + 3\alpha_4$, $A_{22} = 9(6\alpha_1 - 6\alpha_2 - 3\alpha_3 - 2\alpha_5)$, $A_{23} = -(6\alpha_2 + 3\alpha_4)$, $A_{24} = -3\alpha_3$, $A_{25} = -2\alpha_5$.

$A_{31} = \alpha_2 + 2\alpha_5$, $A_{32} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3$, $A_{33} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6)$,
$A_{34} = -(2\alpha_1 + 4\alpha_4)$, $A_{35} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6)$.
$A_{42} = \alpha_2 + 2\alpha_5$, $A_{43} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3$, $A_{44} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6)$,
$A_{45} = -(2\alpha_1 + 4\alpha_4)$, $A_{46} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6)$.
$A_{53} = \alpha_2 + 2\alpha_5$, $A_{54} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3$, $A_{55} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6)$,
$A_{56} = -(2\alpha_1 + 4\alpha_4)$, $A_{57} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6)$.
$A_{64} = \alpha_2 + 2\alpha_5$, $A_{65} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3$, $A_{66} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6)$,
$A_{67} = -(2\alpha_1 + 4\alpha_4)$, $A_{68} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6)$.
$A_{75} = \alpha_2 + 2\alpha_5$, $A_{76} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3$, $A_{77} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6)$,
$A_{78} = -(2\alpha_1 + 4\alpha_4)$, $A_{79} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6)$.
$A_{86} = \alpha_2 + 2\alpha_5$, $A_{87} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3$, $A_{88} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6)$,
$A_{89} = -(2\alpha_1 + 4\alpha_4)$, $A_{8\times 10} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6)$.
$A_{97} = \alpha_2 + 2\alpha_5$, $A_{98} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3$, $A_{99} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6)$,
$A_{9\times 10} = -(2\alpha_1 + 4\alpha_4)$, $A_{9\times 11} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6)$.
$A_{10\times 7} = 2\alpha_5$, $A_{10\times 8} = 3\alpha_2$, $A_{10\times 9} = 6\alpha_1 + 3\alpha_4$, $A_{10\times 10} = 9(6\alpha_1 + 3\alpha_2 - 6\alpha_3 + 2\alpha_5)$,
$A_{10\times 11} = 6\alpha_3 + 3\alpha_4$.
$A_{11\times 7} = 3\alpha_4$, $A_{11\times 8} = 4\alpha_3$, $A_{11\times 9} = 6\alpha_2$, $A_{11\times 10} = 12\alpha_1$, $A_{11\times 11} = 9(12\alpha_1 + 6\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4)$.

Висновки. Наведено новий підхід для покращення збіжності в методі Зейделя. Проведено порівняльний аналіз результатів показав високу точність при застосуванні запропонованого методу на конкретному прикладі. Перевагою методу є те, що можна отримати результати максимально наближені до точних за рахунок дискретного подання апроксимації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике / Власов В.З. – М. - Л.: Гостехиздат, 1949. – 784с.
2. Григоренко Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. – Киев: Академпериодика, 2006. – 472с.
3. Дзюба В.А. Ітераційні методи в задачах математичного моделювання технічних процесів /Дзюба В.А., Стеблянко П.О. // Математичне моделювання: міжнар.наук.конф., квітень 2014 р.: матеріали. – Сімферополь, 2014. – С.3-5.
4. Крылов В.И. Вычислительные методы. В 2-х томах. Т. 1. / В.И.Крылов, В.В.Бобков, И.И.Монастырный. – М.: Наука, 1976. – 216с.
5. Рудаков К.М. Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій: навч. посіб. / Рудаков К.М. – К: НТУУ «КПІ», 2007. – 379с.
6. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А.Самарский. – М.: Наука, 1984. – 272с.
7. Стеблянко П.А. Применение напряженных сплайнов при построении решения задачи для цилиндрической оболочки постоянной толщины / Стеблянко П.А., Сафронов О.О. // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 15. – С.170-182.

Надійшла до редколегії 29.03.2014.