

РОЗДІЛ «МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ»

УДК 539.3

СТЕБЛЯНКО П.О., д-р фіз.-мат.наук, професор
ВОЛОСОВА Н.М., к.т.н, доцент
ДЬОМІЧЕВ К.Е.*, аспірант

Дніпродзержинський державний технічний університет
*Черкаський національний університет ім. Б.Хмельницького

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ ТІЛІ, ЩО ЗБІЛЬШУЄТЬСЯ ЗА ВІДОМИМ ЗАКОНОМ

Вступ. При дослідженні термомеханічної поведінки металевих тіл, що зростають, характерною особливістю є постійний перерозподіл температури, напружень та деформацій, які обумовлені неперервним або дискретним додаванням матеріалу у процесі його зростання. Процеси, що відбуваються у заготовці, суттєвим чином залежать від часу. При охолодженні змінюється температурне поле, змінюються розміри в результаті формування зливка. Всі ці фактори приводять до необхідності побудови такої математичної моделі, яка здатна описувати вказані нестационарні процеси, що відбуваються в тілі. Вихід на стаціонарний режим можливий в результаті встановлення розв'язку задачі після того, як тіло перестає зростати в результаті охолодження. Для чисельного розв'язання таких задач пропонується використовувати варіант методу покомпонентного розщеплення, розроблений в роботі [1].

На даний момент такі задачі розв'язуються чисельними методами: методом кінцевих елементів, методом скінченних різниць та іншими.

Актуальним є застосування методів, які спрощують розрахунок і мають вищу точність результатів при знаходженні напруження та деформації циліндричних тіл у випадку температурного навантаження тіла.

Математичне формулювання моделі. В геометрично лінійній постановці запишемо основні рівняння для розв'язання просторових нестационарних задач теорії термопружнопластичності. Це рівняння руху, рівняння теплопровідності, геометричні співвідношення Коші та фізичні співвідношення, що зв'язують напруження та деформації. В загальному вигляді сформулюємо початкові та граничні умови.

Основною задачею нестационарної теорії термопружнопластичності є визначення швидкостей деформацій, складових тензорів напруг та деформацій і температури, які виникають та змінюються в часі у трьохвимірному тілі у процесі його нагрівання (охолодження) та навантаження. Умови теплообміну задаються у вигляді відповідних граничних умов, а механічні характеристики матеріалу при дослідженні процесів деформування за прямолінійними траєкторіям малої кривизни задаються у вигляді миттєвих діаграм розтягнення зразків, отриманих при різних температурах. Крім цього задаються значення коефіцієнта Пуассона ν та лінійного теплового розширення α_T в залежності від температури. Виходячи з переліченого вище, необхідно визначити температуру $T(\alpha^i, t)$, три компоненти вектора швидкості переміщень $v_k(\alpha^i, t)$, шість складових тензора напруг $\sigma_{ij}(\alpha^k, t)$ та шість компонент тензора деформацій $\varepsilon_{ij}(\alpha^k, t)$, тут $i, j, k = 1, 2, 3$. Таким чином, підлягають визначенню 16 невідомих функцій часу t і просторових ортогональних координат α^i (в циліндричній системі координат $\alpha^1 = R, \alpha^2 = \varphi, \alpha^3 = z$). Для цього скористаємось рівняннями руху

$$\rho \frac{\partial V_R}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{\partial \sigma_{Rz}}{\partial z} + K_R + \frac{\sigma_R}{R}, \quad \rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{zR}}{\partial R} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + K_z + \frac{\sigma_{Rz}}{R}, \quad (1)$$

геометричними співвідношеннями Коші

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_R}{\partial t} &= \frac{\partial V_R}{\partial R}, \quad \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial t} = \frac{V_R}{R}, \quad \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{R\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} - \frac{V\varphi}{2R}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{Rz}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_R}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial R} \right), \quad \frac{\partial \varepsilon_{\varphi z}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2)$$

фізичними співвідношеннями, запропонованими у роботі [2]

$$\sigma_{ij} = 2G^* (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(n)}) + (3\lambda^* \varepsilon_0 - K\varepsilon_T) \delta_{ij}, \quad (3)$$

а також рівнянням теплопровідності.

Температурне поле для ізотропного циліндричного тіла при відсутності в ньому джерела тепла з урахуванням тепла, що виділяється у процесі деформування ($B(\varepsilon_{ij})$), визначається шляхом розв'язування рівняння теплопровідності [1]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \cdot \frac{\partial T}{\partial R} \right) + a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + B(\varepsilon_{ij}), \quad (4)$$

Початковий розподіл температури в тілі, що відповідає природному ненапруженому стану тіла, задається наступним чином

$$T = T_0(\alpha^i) \quad \text{при} \quad t=0. \quad (5)$$

Граничні умови, які відображають вплив навколишнього середовища на температуру тіла, задаються в такий спосіб

$$\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha(T - \theta) - q, \quad (6)$$

де n – зовнішня нормаль до поверхні тіла, α_T – коефіцієнт лінійного теплового розширення, α – коефіцієнт теплообміну, θ – температура навколишнього середовища, q – тепловий потік.

Таким чином, рівняння теплопровідності (4) разом з початковими умовами (5) і граничними умовами (6) дозволяють визначити осесиметричне температурне поле в циліндричному тілі. Для її визначення, у випадку циклічного навантаження, потрібно в кожний момент часу знати розв'язок відповідної нестационарної задачі термомеханіки.

Після визначення поля температур для різних моментів часу розшуковуються складові вектора швидкості переміщень і компоненти тензорів напруг і деформацій, що задовольняють трьом диференціальним рівнянням руху, шести геометричним рівнянням і шести фізичним рівнянням. Зазначені 15 рівнянь розв'язуються при певних початкових і граничних умовах. Початкові умови задаються для всіх 15 невідомих

$$v_i(\alpha^k) = V^o(\alpha^k), \quad \sigma_{ij}(\alpha^k) = \Sigma_{ij}^o(\alpha^k), \quad \varepsilon_{ij}(\alpha^k) = E_{ij}^o(\alpha^k), \quad (7)$$

де $i, j, k = 1, 2, 3$ при $t=0$.

На частині поверхні тіла S_Σ , де задані поверхневі сили $\Sigma_{in}(\alpha^k, t)$, компоненти тензора напруг повинні задовольняти трьом граничним умовам

$$\Sigma_{in}(\alpha^k, t) = \sigma_{ij} \cdot n_j, \quad (8)$$

де n_j – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні тіла у відповідній точці. На іншій частині поверхні S_V , де задані складові вектора швидкості переміщень $V_i(\alpha^i, t)$, швидкості переміщень \mathbf{U}_i повинні приймати значення

$$\mathbf{v}_i = V_i(\alpha^k, t). \quad (9)$$

Визначення невідомих можна вести по-різному залежно від вибору основних невідомих. Скористаємося варіантом змішаного методу розв'язання, коли в якості основних невідомих приймаються три складові вектора швидкості переміщень і шість компонентів тензора напруг, для яких безпосередньо формулюються граничні умови. При цьому із шести фізичних рівнянь за допомогою геометричних співвідношень Коші виключаються всі компоненти тензора деформацій, які потім визначаються на підставі вже відомих складових вектора швидкості переміщень.

Рівняння руху нескінченно малого об'ємного елемента суцільного середовища, яке підлягає деформації, в ортогональній системі координат $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ у геометрично лінійному випадку представимо у вигляді [3]

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho H_j} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \alpha^j} + B_i(\sigma_{mn}), \quad (9)$$

де $i, j, n, m = 1, 2, 3$, а ρ – густина.

В геометрично лінійному випадку для швидкостей деформацій можна записати

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H_j} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \alpha^j} + \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial \alpha^i} \right) + C_{ij}. \quad (10)$$

Система рівнянь (9)-(10) замикається фізичними співвідношеннями, що зв'язують напруги й деформації.

При розв'язанні нестационарної задачі термопластичності будемо використовувати визначальні рівняння, що описують неізотермічні процеси навантаження, як по прямолінійним траєкторіям, так і по траєкторіям деформування малої кривизни. Після розв'язання задачі по геометрії траєкторії деформування можна судити про вірогідність визначальних співвідношень, що використовуються.

Одним з аспектів загальної проблеми розв'язання нестационарних задач для непружних тіл є вибір визначальних співвідношень зв'язку між напругами й деформаціями. Цей вибір обґрунтовується узгодженістю з експериментом і тісно пов'язаний з досліджуваними процесами деформування. У загальному випадку начення деформацій являють собою функції процесу зміни напруг і температури, які визначаються характеристиками всього попереднього процесу зміни фізичних факторів, а не тільки поточними значеннями.

Запишемо фізичні співвідношення, що застосовуються для дослідження обох процесів. Для цього розіб'ємо процес навантаження тіла за часом на окремі, досить малі, етапи; на кожному з них за допомогою постулату ізотропії А.А.Ілліушина й закону пружної зміни об'єму записується зв'язок між напругами й деформаціями вигляду [4]

$$\sigma_{ij} = 2G^*(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^{(n)}) + (3\lambda^* \varepsilon - K\varepsilon_T) \delta_{ij}, \quad (11)$$

де $i, j = 1, 2, 3$, δ_{ij} – символ Кронекера, а також

$$\lambda^* = \frac{2G(1+\nu) - 2G^*(1-2\nu)}{3(1-2\nu)}, \quad K = \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu}, \quad \varepsilon_T = \alpha_T(T - T_0). \quad (12)$$

Тут G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона, α_T – коефіцієнт лінійного теплового розширення. Величини G, ν, α_T у загальному випадку передбачаються залежними від температури. Вирази для G^* і $\epsilon_{ij}^{(n)}$ мають різний вигляд залежно від співвідношень пластичності, що використовуються: співвідношення теорії простих процесів навантаження або співвідношення процесів малої кривизни. Конкретизація визначальних рівнянь зводиться до завдання миттєвої термомеханічної поверхні. Для проведення розрахунків необхідно апроксимувати яким-небудь чином цю функцію. Припустимо, що рівняння миттєвої термомеханічної поверхні задається у вигляді таблиці експериментальних даних $(\sigma)_i, (\epsilon)_i, i = 0, 1, \dots, N$ при фіксованих T . Зробимо апроксимацію цих даних за допомогою сплайн-функцій.

Таким чином, отримана розрахункова система рівнянь (1)-(12), необхідна для розв'язування нестационарних зв'язаних задач теорії термомеханіки.

Розглянемо приклад чисельного розв'язання осесиметричної задачі для товстостінного циліндра, що зростає.

Аналіз чисельних результатів. Нехай в момент часу $t=0$ до товстостінного циліндра 1 ($R \in [R_0, R_1], z \in [0, L]$), що знаходиться в ненапруженому стані, додається інший циліндричний шар 2 ($R \in (R_1, R_2], z \in [0, L]$) з того ж матеріалу. Температурне поле тіла 1 стаціонарне та має вигляд $T = T_0 + (T_1 - T_0) * l, l = (R - R_0)/(R_1 - R_0)$. Для тіла 2 – $T = T_1$ за всією товщиною. Визначимо нестационарний термопружний стан, обумовлений подальшим перерозподілом температури в тілах 1 та 2.

Для чисельного розв'язання даної задачі застосуємо варіант методу покомпонентного розщеплення, розроблений в роботі [1]. Система рівнянь (1)-(3) може бути записана у розщепленому вигляді

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{V}}{\partial R} + \frac{2}{3} \vec{B}, t \in [t_p; t_{p+1/2}], \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = A_3 \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{1}{3} \vec{B}, t \in [t_{p+1/2}; t_{p+1}]. \quad (13)$$

До складу вектора \vec{V} входять швидкості переміщень, напруги та деформації, а до складу вектора \vec{B} – праві частини системи з урахуванням змін температури. Система (13) розв'язувалась чисельно за допомогою ітераційної процедури, яка базувалась на неявній схемі.

На рис.1 наведено результати розрахунків за часом безрозмірної складової σ_r / σ_s тензора напруг, коли $z = R_1$. Результати наведені для різних кроків інтегрування за часом $\tau = 0,1$ та $\tau = 0,05$.

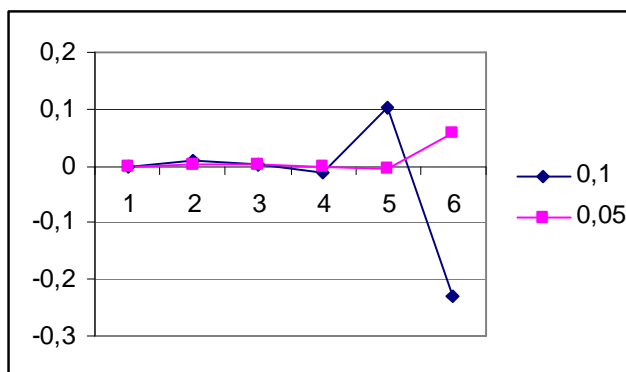


Рисунок 1

Характер зміни температури $T (z = R_1)$ за часом показаний на рис.2 (крива 1 отримана при $\tau = 0,1$, а крива 2 при $\tau = 0,05$) в початковий момент часу при $T=600$ °С.

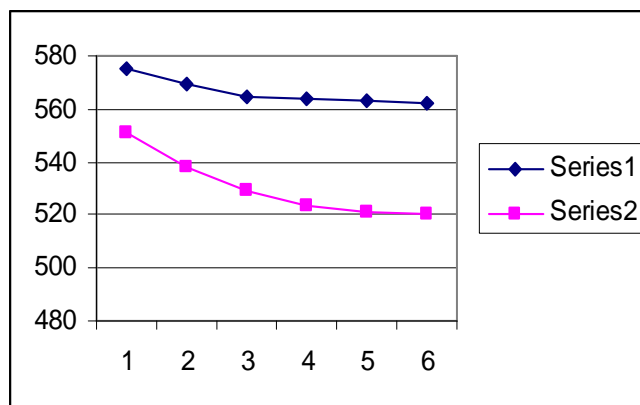


Рисунок 2

Висновки. Запропонована в даній роботі двохвимірною моделлю циліндричного тіла, що зростає, дозволяє визначити його термонапружений стан та дає можливість оцінити максимальну величину інтенсивності напруг у процесі встановлення розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М.: Наука, 1980. – 352с.
2. Марчук Г.И. Методы расщепления / Марчук Г.И. – Москва: Наука, 1988. – 263с.
3. Стебляк П.А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности / Стебляк П.А. – К.: Наукова думка, 1998. – 304с.
4. Шевченко Ю.Н. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2. Термовязкопластичность / Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. – К.: Наукова думка, 1987.–264с.
5. Стебляк П.О. Побудова базисного тривимірного сплайна для розв'язування задач математичного моделювання / Стебляк П.О., Кравчук Т.В. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки) / Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2014. – Випуск 1(24). – С.204-211.

Надійшла до редколегії 24.09.2014

УДК 539.3

ЛУГОВИЙ П.З., д.т.н., професор
МЕЙШ В.Ф., д.фіз.-мат. н., професор
МЕЙШ Ю.А., к.фіз.-мат.н., доцент

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

ДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ КОНСТРУКТИВНО ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ПРУЖНОЮ ОСНОВОЮ

Вступ. Задачі динамічної взаємодії циліндричних оболонок з пружними середовищами є актуальними, оскільки циліндричні оболонки знаходять широке застосування в сучасних інженерних конструкціях і спорудах у вигляді тунелів, резервуарів, трубопроводів і т.д. В математичному плані такі задачі є достатньо складними в плані постановки і розв'язку (використання рівнянь суцільного середовища і рівнянь теорії оболонок, формулювання умов контакту середовище – оболонка, побудова чисельного алгоритму розв'язку вихідних задач і т.д.) [1-4]. В роботі [4] приведено чисельні розв'язки динамічних задач взаємодії гладких та сферичних оболонок з навколишнім середови-