

Рисунок 2

Висновки. Запропонована в даній роботі двохвимірною моделлю циліндричного тіла, що зростає, дозволяє визначати його термонапружений стан та дає можливість оцінити максимальну величину інтенсивності напруг у процесі встановлення розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М.: Наука, 1980. – 352с.
2. Марчук Г.И. Методы расщепления / Марчук Г.И. – Москва: Наука, 1988. – 263с.
3. Стебляк П.А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности / Стебляк П.А. – К.: Наукова думка, 1998. – 304с.
4. Шевченко Ю.Н. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2. Термовязкопластичность / Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. – К.: Наукова думка, 1987.–264с.
5. Стебляк П.О. Побудова базисного тривимірного сплайна для розв'язування задач математичного моделювання / Стебляк П.О., Кравчук Т.В. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки) / Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2014. – Випуск 1(24). – С.204-211.

Надійшла до редколегії 24.09.2014

УДК 539.3

ЛУГОВИЙ П.З., д.т.н., професор
МЕЙШ В.Ф., д.фіз.-мат. н., професор
МЕЙШ Ю.А., к.фіз.-мат.н., доцент

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

ДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ КОНСТРУКТИВНО ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ПРУЖНОЮ ОСНОВОЮ

Вступ. Задачі динамічної взаємодії циліндричних оболонок з пружними середовищами є актуальними, оскільки циліндричні оболонки знаходять широке застосування в сучасних інженерних конструкціях і спорудах у вигляді тунелей, резервуарів, трубопроводів і т.д. В математичному плані такі задачі є достатньо складними в плані постановки і розв'язку (використання рівнянь суцільного середовища і рівнянь теорії оболонок, формулювання умов контакту середовище – оболонка, побудова чисельного алгоритму розв'язку вихідних задач і т.д.) [1-4]. В роботі [4] приведено чисельні розв'язки динамічних задач взаємодії гладких та сферичних оболонок з навколишнім середови-

шем, яке моделюється трикомпонентним ґрунтом [5]. В даній роботі наведено розв'язок динамічних задач підкріплених циліндричних оболонок з навколишнім середовищем в рамках теорії середовища [5].

1. Динамічні рівняння теорії підкріплених циліндричних оболонок в рамках моделі типу Тимошенка. Динамічна поведінка підкріпленої циліндричної оболонки описується рівняннями осесиметричних коливань теорії оболонок типу Тимошенка [5] в рамках конструктивно – ортотропної моделі. Розглядається циліндрична оболонка, підкріплена ребрами, напрями яких співпадають з лініями головних кривизн серединної поверхні. Для безпосередньо гладкої оболонки приймається наступний закон розподілу переміщень по товщині

$$u_1^z(x, z) = u_1(x) + z\phi_1(x), \quad u_3^z(x, z) = u_3(x). \quad (1)$$

Напружено-деформований стан ребра, яке направлене вздовж осі X , можна описати за допомогою вектора переміщень центра ваги поперечного перерізу $\bar{U}_{pi} = (u_{1pi}, u_{3pi}, \phi_{1pi})$. Відповідно, для ребра направленого вздовж осі Y , маємо $\bar{U}_{pj} = (u_{1pj}, u_{3pj}, \phi_{1pj})$.

Виходячи з умов контакту жорсткого з'єднання оболонка ребро [5], із застосуванням варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, отримаємо наступні рівняння коливань підкріпленої циліндричної оболонки в рамках конструктивно-ортотропної моделі

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} + P_3(x, t) = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} = & \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\ & + \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{kj}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

$$T_{11} = \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{EF_1}{l_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \pm \frac{EF_1 h_{ci}}{l_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{E\nu h}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R}, \quad (3)$$

$$T_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\frac{E\nu h}{1-\nu^2} + \frac{EF_2}{l_2} \right) \frac{u_3}{R}, \quad T_{13} = \left(Gh + \frac{G_1 F_1}{l_1} \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \phi_1 \right),$$

$$M_{11} = \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E_1 I_1}{l_1} \right), \quad I_1 = \frac{a_1 h_1^3}{12}, \quad I_2 = \frac{a_2 h_2^3}{12}.$$

У рівняннях (2), (3) введено наступні позначення: ρ, E, G, ν – фізико-механічні параметри власно гладкої оболонки; ρ_1, E_1, G – фізико-механічні параметри повздовжнього набору підкріплень; ρ_2, E_2, G – відповідно фізико-механічні параметри поперечного набору підкріплень; h – товщина оболонки; l_1, l_2 – відстань між ребрами для

повздожнього та поперечного набору; a_1, h_1, F_1 – геометричні параметри ребер вздовж осі x ; a_2, h_2, F_2 – геометричні параметри ребер вздовж осі Y ; $h_{c1} = 0,5(h + h_1)$, $h_{c2} = 0,5(h + h_2)$. Знаки \pm відповідають місцю розташуванню підкріплень – (+) – зовнішньому набору підкріплень, знак (–) – внутрішньому набору підкріплень; $P_3(x, t)$ – розподілене навантаження.

Рівняння (2), (3) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

2. Постановка зв’язної задачі циліндричних оболонок – пружна основа.

Розглядається процес деформування нескінченно довгої підкріпленої циліндричної оболонки в ґрунтовому середовищі при внутрішньому імпульсному навантаженні. Рух ґрунтового середовища описується системою рівнянь в ейлерових змінних [5, 6]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(\rho V^2 + P) - \frac{1}{r} P \right] = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho V)] = 0. \quad (4)$$

У рівняннях (4) r – просторова координата; t – часова координата; V – швидкість; ρ – густина; P – тиск.

Рівняння стану ґрунтового середовища приймається згідно моделі нелінійного рідкого багатокомпонентного середовища [5]

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i}, \quad \rho_0 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \rho_{i0}, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1, \quad (5)$$

де величини з індексом 1 відносяться до повітря, 2 – до води і 3 – до твердого компоненту; α_i – вміст компонентів по об’єму; γ_i – показники ізентроп в газоподібному, рідкому та твердому компонентах середовища; c_{i0} – швидкість звуку у відповідних компонентах середовища при атмосферному тиску P_0 ; ρ_{i0} – густина компонентів середовища.

Швидкість звуку при тиску P_1 визначається із умови $c = (dp/d\rho)^{1/2}$ і має вигляд

$$c = \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i}}{\left\{ \rho_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{\rho_{i0} c_{i0}^2} \left[\frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-(1+\gamma_i)/\gamma_i} \right\}^{1/2}}. \quad (6)$$

Рівняння коливань підкріпленої оболонки радіусом R і товщиною h приймається згідно (2), (3). У випадку нескінченно довгої оболонки рівняння (1.2) з врахуванням (3) мають вигляд

$$\rho_0 \sigma h \left(1 + \frac{F_1}{l_1 h} + \frac{F_2}{l_2 h} \right) \ddot{u}_3 = - \left(\frac{Eh}{1 - \nu^2} + \frac{EF_2}{l_2} \right) \frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t). \quad (7)$$

Як частковий випадок, отримаємо рівняння коливань конструктивно ортотропної оболонки з регулярним повздожнім підкріпленням

$$\rho_{об} h \left(1 + \frac{F_1}{l_1 h} \right) \ddot{u}_3 = - \frac{Eh}{1 - \nu^2} \frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t). \quad (8)$$

В рівняннях (7), (8) $P_3(t)$ – навантаження на внутрішню частину оболонки; $P_r(t)$ – тиск ґрунту на оболонку; u_3 – радіальне переміщення оболонки; $\rho_{об}, E, \nu$ – фізико-механічні параметри матеріалу оболонки та ребер для випадку ізотропного матеріалу для обшивки та ребер.

Зв'язність задачі взаємодії забезпечує умова непротікання на поверхні контакту оболонка – ґрунтове середовище, що деформується

$$\dot{u}_3 = V_r, \quad (9)$$

де V_r – швидкість границі ґрунтового середовища.

За граничні умови для задачі динаміки ґрунтового середовища приймаються рівняння (7)-(9) та умови незбуреного руху на нескінченності.

3. Чисельний алгоритм розв'язку зв'язної динамічної задачі. Алгоритм розв'язку задачі про взаємодію циліндричної оболонки з ґрунтовим середовищем, рівняння (4)-(9), базується на використанні скінчено-різницевої схеми Мак-Кормака [6].

На кроці предиктор різниці рівняння мають вигляд

$$\tilde{\rho}_k = \rho_k^n - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{(r\rho^n V^n)_{k+1} - (r\rho^n V^n)_k}{\Delta r} \right], \quad (10)$$

$$(\tilde{\rho}\tilde{V})_k = (\rho^n V^n)_k - \frac{\tau}{r_k} \left\{ \frac{[r\rho(V^2 + P)^n]_{k+1} - [r(\rho V^2 + P)^n]_k}{\Delta r} - P_k^n \right\}, \quad F(\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k) = 0.$$

На кроці коректор рівняння записуються наступним чином

$$\rho_k^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_k^n + \tilde{\rho}_k - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{(r\tilde{\rho}\tilde{V})_k - (r\tilde{\rho}\tilde{V})_{k-1}}{\Delta r} \right] \right\}, \quad (11)$$

$$(\rho V)_k^{n+1} = 0,5 \left\{ (\rho^n V^n)_k + (\tilde{\rho}^n \tilde{V}^n)_k - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{[r(\tilde{\rho}\tilde{V}^2 + \tilde{P})^n]_k - [r(\tilde{\rho}\tilde{V}^2 + \tilde{P})^n]_{k-1}}{\Delta r} - \tilde{P}_k \right] \right\},$$

$$F(P_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) = 0.$$

Для знаходження шуканих величин на поверхні контакту оболонка - ґрунтове середовище використовується наступна процедура. Рівняння коливань оболонки (7) представимо у вигляді

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = H, \quad H = \frac{1}{\rho_{об} \left(1 + \frac{F_1}{l_1 h} + \frac{F_2}{l_2 h} \right)} \left[- \frac{\sigma_{22}}{R} + \frac{P_3(t) - P_0}{h} \right], \quad (12)$$

На кроці предиктор рівняння (12) апроксимуються наступними співвідношеннями

$$\tilde{V}_0 = V_0^n + \tau H_0(t^n), \quad (13)$$

$$\text{де } H_0(t^n) = \frac{1}{\rho_{об} \left(1 + \frac{F_1}{l_1 h} + \frac{F_2}{l_2 h}\right)} \left[-\frac{\sigma_{22}^n}{R} + \frac{P_3(t^n) - P_0^n}{h} \right].$$

Величини $\tilde{\rho}_0, \tilde{P}_0$ знаходяться за формулами

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_0^n - \frac{\tau}{r_0} \left[\frac{-3r_0(\rho_0^n V_0^n) + 4r_1(\rho_1^n V_1^n) - r_2(\rho_2^n V_2^n)}{2\Delta r} \right], \quad F(\tilde{P}_0, \tilde{\rho}_0) = 0. \quad (14)$$

На кроці коректор для апроксимації рівнянь (12) використовуються скінчено-різницеві співвідношення виду

$$V_0^{n+1} = 0,5[V_0^n + \tilde{V}_0 + \tau H_1(t^{n+1})], \quad (15)$$

$$\text{де } H_1(t^{n+1}) = \frac{1}{\rho_{об} \left(1 + \frac{F_1}{l_1 h} + \frac{F_2}{l_2 h}\right)} \left[-\frac{\sigma_{22}^{n+1}}{R} + \frac{P_3(t^{n+1}) - \tilde{P}_0}{h} \right].$$

Величини ρ_0^{n+1} і P_0^{n+1} знаходяться згідно наступних формул

$$\rho_0^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_0^n + \tilde{\rho}_0 - \frac{\tau}{r_0} \left[\frac{-3r_0(\tilde{\rho}_0 \tilde{V}_0) + 4r_1(\tilde{\rho}_1 \tilde{V}_1) - r_2(\tilde{\rho}_2 \tilde{V}_2)}{2\Delta r} \right] \right\}, \quad (16)$$

$$F(P_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}) = 0.$$

В співвідношеннях (10)-(16) функція $F(P, \rho)$ має вигляд згідно рівнянь (5)

$$F(P, \rho) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i} - \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (17)$$

Для знаходження величини P по заданим значенням ρ використовується ітераційна процедура Ньютона-Рафсона. Враховуючи, що різницева схема Мак-Кормака (10), (11) є явною, тоді при розрахунках використовувалася умова різницевої стійкості [6]

$$(|V| + c)\tau / \Delta r < 1,$$

де величина c відповідна локальна швидкість звуку – формули (6).

4. Аналіз чисельних результатів. Розглядалася нескінченно довга поздовжньо підкріплена циліндрична оболонка в ґрунтовому середовищі при внутрішньому імпульсному навантаженні $P_3(t)$ – рівняння (8). Відповідні різницеві рівняння – (10)-(16). Розрахунки проводилися для сталеві оболонки радіусу $R = 0,1$ м; товщиною $h = 0,01$ м. Модуль Юнга матеріалу оболонки $E = 210$ ГПа, коефіцієнт Пуассона – $\nu = 0,3$; густина $\rho_{об} = 7880$ кг/м³. Навантаження $P_3(t)$ задавалося наступною залежністю

$$P_3(t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

де T – час навантаження; A – амплітуда навантаження; $\eta(t)$ – функція Хевісайда. При розрахунках покладалося $A = 1,0$ МПа; $T = 50$ мкс.

Задача розв’язувалася для ґрунту з наступними характеристиками компонент:

- 1) повітря – $\rho_1 = 1,2$ кг/м³; $c_1 = 330$ м/с; $\gamma_1 = 1,4$;
- 2) вода – $\rho_2 = 10^3$ кг/м³; $c_2 = 1500$ м/с; $\gamma_2 = 7$;
- 3) тверда компонента – $\rho_3 = 2650$ кг/м³; $c_3 = 4500$ м/с; $\gamma_3 = 4$.

Згідно рівнянь коливань поздовжньо підкріпленої оболонки в рамках конструктивно – ортотропної моделі бачимо, що вплив повздовжніх підкріплень проявляється лише в інерційному доданку. Тому, надалі будемо проводити аналіз хвильових процесів виходячи з приведеної маси підкріпленої оболонки $m = \rho_{об}h[1 + F_1/(l_1h)]$. Будемо характеризувати процес виходячи з коефіцієнта m/m_0 , де $m_0 = \rho_{об}h$.

На рис.1 наведено закономірності розповсюдження хвилі тиску P по просторовій координаті r в різні моменти часу для випадку варіанту – $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,3$; $\alpha_3 = 0,7$ в залежності від величини m/m_0 . Криві 1-3 відповідають залежностям при $m/m_0 = 1; 1,2; 1,4$ відповідно в часи проходження віддалі по координатам $r = 2r_0$, $r = 3r_0$, $r = 4r_0$. На рис.2 наведено аналогічні залежності для величини $m/m_0 = 1,6; 1,8; 2$ – криві 4-6. Як бачимо, згідно кривих наведених на рис.1 значення величини тиску для варіанту $m/m_0 = 1$ більше ніж на 10% від відповідного значення тиску при $m/m_0 = 1,4$. Аналогічна картина спостерігається згідно залежностям, наведеним на рис.2.

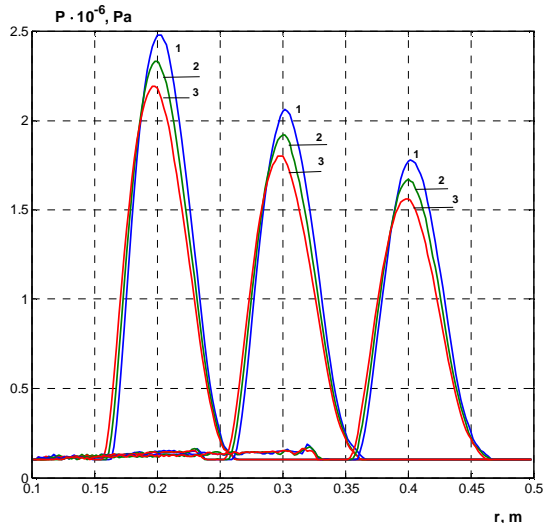


Рисунок 1

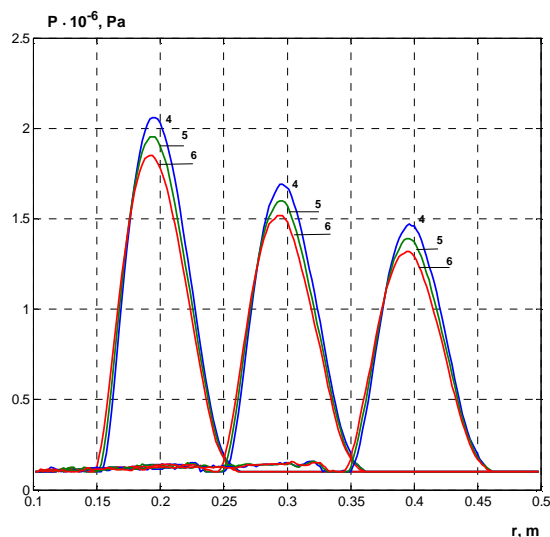


Рисунок 2

Висновки. У роботі наведено розв’язок динамічних задач підкріплених циліндричних оболонок при взаємодії з ґрунтовим середовищем. Динамічна поведінка підкріпленої циліндричної оболонки описується рівняннями осесиметричних коливань теорії оболонок типу Тимошенка в рамках конструктивно – ортотропної моделі. Рівняння стану ґрунтового середовища приймається згідно моделі нелінійного рідкого багатокомпонентного середовища. Алгоритм розв’язку задачі про взаємодію циліндричної оболонки з ґрунтовим середовищем базується на використанні скінчено-різницевої

схеми Мак-Кормака. Наведено аналіз хвильових процесів в системі підкріплена циліндрична оболонка – ґрунтове середовище.

ЛІТЕРАТУРА

1. Баженов В.Г. Деформирование цилиндрических оболочек в мягкой грунтовой среде под действием внутреннего импульсного нагружения / Баженов В.Г., Кочетков А.В., Фельдгун В.Р. // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. – Горький: Горьковский ун-т. – 1989. – С.87-95.
2. Кочетков А.В. Нестационарное взаимодействие тонкостенных конструкций с ударными волнами в грунтовых средах / Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р. // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. – Горький: Горьковский ун-т. – 1985. – С.60-65.
3. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. – К: Издательско-полиграфический центр “Киевский университет”, 2005. – 536с.
4. Головки К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография / Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.; под ред. акад. НАН Украины А.Н.Гузя. – К.: Издательско-полиграфический центр “Киевский университет”, 2012. – 541с.
5. Ляхов В.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах / В.М. Ляхов. – М.: Недра, 1982. – 288с.
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. / Флетчер К. – М.: Мир, 1991. – 552с.

Надійшла до редколегії 29.09.2014

УДК 539.3

БАГНО О.М., д.фіз.-мат.н.

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

ХВИЛІ У ШАРІ В'ЯЗКОЇ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ НА ПРУЖНОМУ ШАРІ

Вступ. Хвилі, що поширюються вздовж границі контакту пружного шару та шару рідини, належать до числа узагальнень ґрунтовно досліджених основних типів акустичних хвиль: Релея, Стоунлі, Лява та Лемба. Огляд робіт і аналіз результатів, отриманих у рамках класичної теорії пружності та моделі ідеальної стисливої рідини, наведено в [1]. Разом з тим, значне практичне використання поверхневих хвиль вимагає врахування властивостей, які притаманні реальним середовищам. До числа таких факторів належить в'язкість рідини. Задачі, що розглянуто, та результати, які отримані з урахуванням цієї властивості рідини, наведено в [2-4]. У даній роботі для дослідження поширення хвиль у шарі рідини, що взаємодіє з пружним шаром, залучається модель в'язкої стисливої ньютонівської рідини. При цьому використовуються лінеаризовані тривимірні рівняння Нав'є-Стокса для рідини, що знаходиться у стані спокою без урахування теплових ефектів. В якості підходу обрано постановки задач і метод, що базуються на застосуванні представлень загальних розв'язків рівнянь руху в'язкої стисливої рідини, запропонованих у роботах [5-10].

Постановка задачі. Розглянемо задачу про поширення акустичних хвиль у гідропружній системі, що складається з пружного шару та шару в'язкої стисливої рідини. Розв'язок отримаємо із залученням тривимірних рівнянь класичної теорії пружності для