

схеми Мак-Кормака. Наведено аналіз хвильових процесів в системі підкріплена циліндрична оболонка – ґрунтове середовище.

ЛІТЕРАТУРА

1. Баженов В.Г. Деформирование цилиндрических оболочек в мягкой грунтовой среде под действием внутреннего импульсного нагружения / Баженов В.Г., Кочетков А.В., Фельдгун В.Р. // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. – Горький: Горьковский ун-т. – 1989. – С.87-95.
2. Кочетков А.В. Нестационарное взаимодействие тонкостенных конструкций с ударными волнами в грунтовых средах / Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р. // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. – Горький: Горьковский ун-т. – 1985. – С.60-65.
3. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. – К: Издательско-полиграфический центр “Киевский университет”, 2005. – 536с.
4. Головки К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография / Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.; под ред. акад. НАН України А.Н.Гузя. – К.: Издательско-полиграфический центр “Киевский университет”, 2012. – 541с.
5. Ляхов В.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах / В.М. Ляхов. – М.: Недра, 1982. – 288с.
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. / Флетчер К. – М.: Мир, 1991. – 552с.

Надійшла до редколегії 29.09.2014

УДК 539.3

БАГНО О.М., д.фіз.-мат.н.

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

ХВИЛІ У ШАРІ В'ЯЗКОЇ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ НА ПРУЖНОМУ ШАРІ

Вступ. Хвилі, що поширюються вздовж границі контакту пружного шару та шару рідини, належать до числа узагальнень ґрунтовно досліджених основних типів акустичних хвиль: Релея, Стоунлі, Лява та Лемба. Огляд робіт і аналіз результатів, отриманих у рамках класичної теорії пружності та моделі ідеальної стисливої рідини, наведено в [1]. Разом з тим, значне практичне використання поверхневих хвиль вимагає врахування властивостей, які притаманні реальним середовищам. До числа таких факторів належить в'язкість рідини. Задачі, що розглянуто, та результати, які отримані з урахуванням цієї властивості рідини, наведено в [2-4]. У даній роботі для дослідження поширення хвиль у шарі рідини, що взаємодіє з пружним шаром, залучається модель в'язкої стисливої ньютонівської рідини. При цьому використовуються лінеаризовані тривимірні рівняння Нав'є-Стокса для рідини, що знаходиться у стані спокою без урахування теплових ефектів. В якості підходу обрано постановки задач і метод, що базуються на застосуванні представлень загальних розв'язків рівнянь руху в'язкої стисливої рідини, запропонованих у роботах [5-10].

Постановка задачі. Розглянемо задачу про поширення акустичних хвиль у гідропружній системі, що складається з пружного шару та шару в'язкої стисливої рідини. Розв'язок отримаємо із залученням тривимірних рівнянь класичної теорії пружності для

твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса для рідини, що знаходиться у стані спокою. У рамках прийнятих моделей основні співвідношення для системи пружне тверде тіло – в'язка стислива рідина будуть мати вигляд

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_j} + \frac{\partial u_j}{\partial z_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p - \frac{1}{3} \nu \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; \quad a_0 = \text{const}; \quad (5)$$

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \mu^* \left(\frac{\partial v_i}{\partial z_j} + \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \right). \quad (6)$$

Тут введені наступні позначення: u_i – компоненти вектора переміщень твердого тіла; ρ – щільність матеріалу пружного шару; λ та μ – константи Ляме матеріалу твердого тіла; v_i – складові вектора збурень швидкості рідини; ρ^* та p – збурення щільності та тиску в рідині; ν^* та μ^* – кінематичний та динамічний коефіцієнти в'язкості рідини; ρ_0 та a_0 – щільність та швидкість звуку в рідині у стані спокою.

Рівності (1)-(2) описують поведінку твердого тіла. Малі коливання в'язкої стисливої рідини, що знаходиться в стані спокою та без врахування теплових ефектів, описують співвідношення (3)-(6).

Далі припустимо, що пружний шар заповнює об'єм: $-\infty < z_1 < \infty$, $-h_2 \leq z_2 \leq 0$, $-\infty < z_3 < \infty$ та контактує з шаром в'язкої стисливої рідини, що займає об'єм: $-\infty < z_1 < \infty$, $0 \leq z_2 \leq h_1$, $-\infty < z_3 < \infty$. Будемо вважати, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно вздовж осі oz_3 . Оскільки у цьому випадку хвиля, яка біжить у напрямку вісі oz_1 збурення, що її викликають, не залежать від змінної z_3 , то задача буде плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль у площині oz_1z_2 .

Отже, зазначена задача зводиться до розв'язання системи рівнянь (1) – (6) при наступних граничних умовах:

$$P_{21} \Big|_{z_2=0} = \sigma_{21} \Big|_{z_2=0}; \quad P_{22} \Big|_{z_2=0} = \sigma_{22} \Big|_{z_2=0}; \quad (7)$$

$$v_1 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{z_2=0}; \quad v_2 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0}; \quad (8)$$

$$\sigma_{21} \Big|_{z_2=-h} = 0; \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=-h} = 0; \quad (9)$$

$$P_{21} \Big|_{z_2=h} = 0; \quad P_{22} \Big|_{z_2=h} = 0. \quad (10)$$

У подальшому для спрощення розв'язання задачі гідропружності скористаємося представленнями загальних розв'язків для твердих пружних тіл і в'язкої стисливої рідини, запропонованими в [5–10]:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1; \quad (11)$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t}; \quad (12)$$

де введені потенціали χ_i є розв'язками наступних рівнянь:

$$-(\lambda + \mu)^{1/2} / (\mu(\lambda + 2\mu)) \partial^4 / (\partial z_1^2 \partial z_2^2) \chi_{11} = 0; \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_{11} = 0. \quad (15)$$

Результати роботи. Для аналізу поширення збурень, які гармонічно змінюються з часом, розв'язки системи рівнянь розшуковуються у класі біжучих хвиль

$$\chi_i = X_i(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)], i = \overline{1,3}, \quad (16)$$

де k ($k = \beta + i\gamma$) – хвильове число; γ – коефіцієнт згасання хвиль; ω – кругова частота.

Зауважимо, що обраний в даній роботі клас гармонічних хвиль, який є найбільш простим і зручним у теоретичних дослідженнях, не обмежує загальності отриманих результатів, оскільки лінійна хвиля довільної форми, як відомо, може бути представлена набором гармонічних складових. Далі розв'язуються дві задачі Штурма – Ліувілля на власні значення для рівнянь руху пружного тіла та рідини, а також знаходяться відповідні власні функції. Після підстановки розв'язків у граничні умови (7) – (10) отримуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку, та, прирівнюючи визначник системи до нуля, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det \| e_{mn}(\epsilon, \gamma, \lambda, \mu, \rho, a_0, \rho_0, \lambda^*, \mu^*, \omega h_1 / c_s, \omega h_2 / c_s) \| = 0; m, n = \overline{1,8}, \quad (17)$$

де c – фазова швидкість нормальних мод у гідропружній системі, h_2 – товщина пруж-

ного шару, h_1 – товщина шару рідини, $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – швидкість хвилі зсуву в твердому тілі. Зауважимо, що особливість розповсюдження збурень у гідропружному хвилеводі зазначеної структури обумовлена наявністю в пружному тілі та рідині граничних поверхонь. Це значно ускладнює картину хвильового поля у ньому. Причиною цього є те, що у формуванні поля в гідропружній системі суттєву роль відіграють не тільки наявність рідини, а також взаємодія хвиль з поверхнею пружного тіла, контактуючого з рідким середовищем, але і наявність вільних границь та їх взаємовплив. Складна взаємодія хвиль, породжених граничними поверхнями, призводить до виникнення, так званих, квазіповерхневих мод.

Відмітимо, що отримане дисперсійне рівняння (17) є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду частинних випадків, які розглянуті в роботах [1-4, 6-12]. Зокрема, якщо a_0 спрямувати до нескінченності, то (17) переходить у рівняння для визначення параметрів мод у випадку взаємодії з в'язкою нестисливою рідиною. Якщо μ^* покласти рівним нулю, то з (17) отримаємо результати для гідропружної системи з ідеальною рідиною [1, 11, 12]. При $\rho_0 = 0$ рівність (17) перейде в рівняння для визначення швидкостей хвиль Лемба [1]. Якщо додатково спрямувати h_2 до нескінченності, отримаємо співвідношення для визначення швидкостей поверхневих хвиль Релея [1]. При $\rho_0 \neq 0$ та $h_1 \rightarrow \infty$ рівність перейде у рівняння Стоунлі [1].

У подальшому дисперсійне рівняння (17) розв'язувалося чисельно. При цьому числові розрахунки проводилися для системи оргскло – вода, яка характеризувалася наступними параметрами: пружний шар – $\rho = 1160$ кг/м³, $\lambda = 3,96 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 1,86 \cdot 10^9$ Па; шар рідини – $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $a_0 = 1459,5$ м/с, $\mu^* = 0,001$. Результати обчислень представлені на рис.1-5.

На рис.1 для пружного шару, який не взаємодіє з рідиною, приведено залежності безрозмірних фазових швидкостей \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) від безрозмірної товщини пружного шару \bar{h}_2 ($\bar{h}_2 = \frac{\omega h_2}{c_s}$). Номерами n_a позначено антисиметричні моди, а n_s - відповідно симетричні моди.

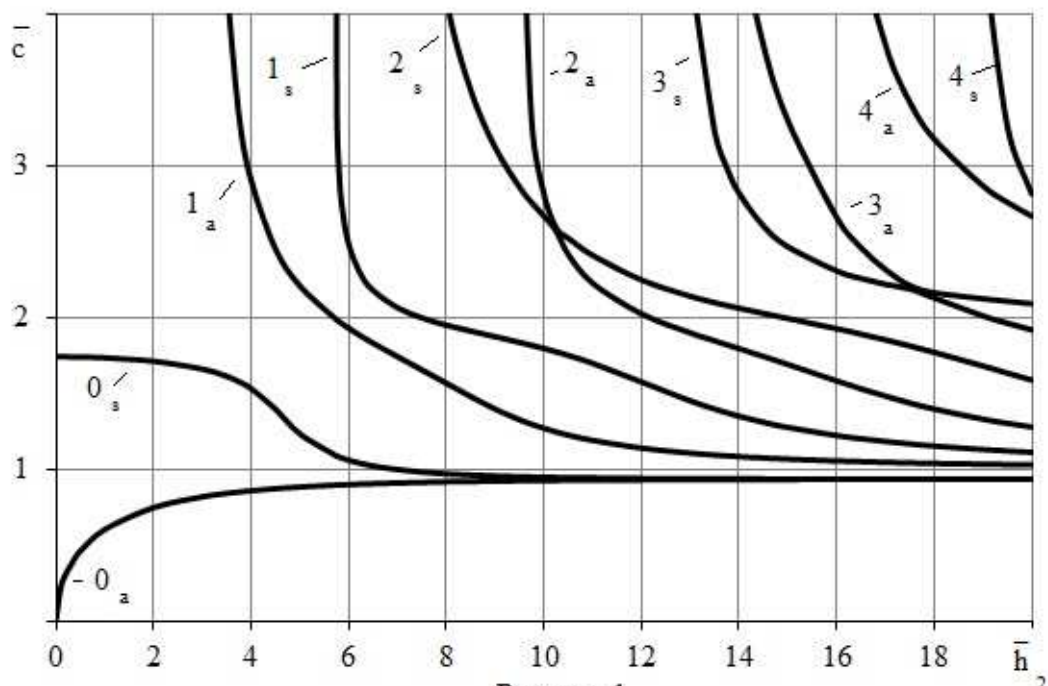


Рисунок 1

На рис.2 представлені дисперсійні криві для гідропружного хвилеводу, які показують залежності безрозмірних фазових швидкостей від безрозмірної товщини шару ідеальної стисливої рідини \bar{h}_1 ($\bar{h}_1 = \frac{\omega h_1}{c_s}$) для пружного шару з товщиною рівною $\bar{h}_2=2$.

Характер впливу в'язкості рідини на швидкості мод у гідропружній системі ілюструють графіки на рис.3-4, де представлені залежності відносних змін величин фазових швидкостей c^* ($c^* = \frac{c_t - c_v}{c_t}$, c_t – фазова швидкість нормальних мод у гідропружній системі з ідеальною рідиною, c_v – фазова швидкість нормальних хвиль у системі з в'язкою рідиною) від товщини шару рідини \bar{h}_1 для перших 7 мод. На цих рисунках представлені графіки для гідропружного хвилеводу, товщина пружного шару якого дорівнює $\bar{h}_2=2$.

На рис.5 наведено залежності безрозмірних коефіцієнтів згасання нормальних мод $\bar{\gamma}$ ($\bar{\gamma} = \gamma/k_s, k_s$ – хвильове число хвилі зсуву в матеріалі пружного шару) від товщини шару рідини \bar{h}_1 .

З графіків, представлених на рис.1, випливає, що швидкість нульової антисиметричної моди при зростанні товщини пружного шару прямує до швидкості хвилі Релея знизу, а швидкість нульової симетричної моди прямує до швидкості хвилі Релея згори. Швидкості усіх вищих мод при збільшенні товщини пружного шару прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла.

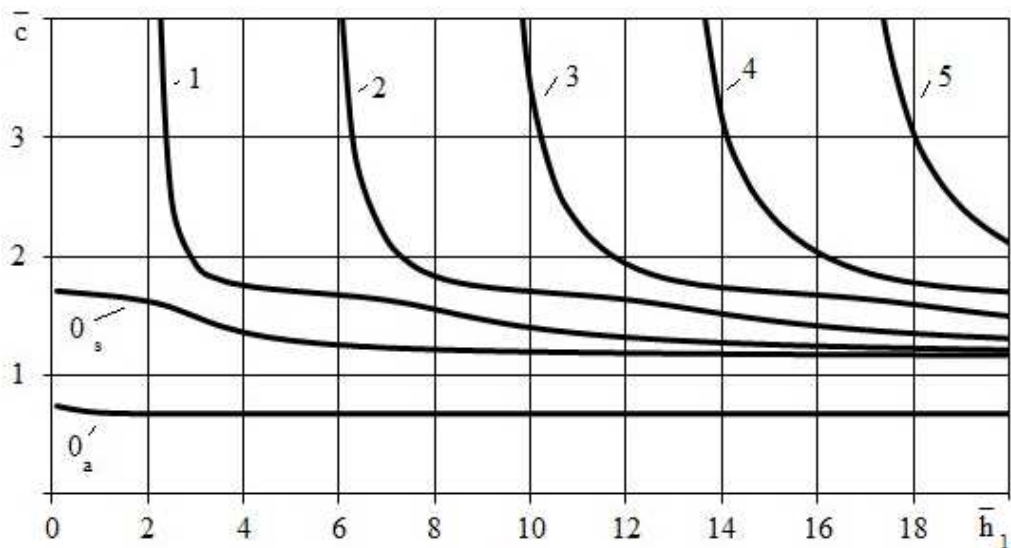


Рисунок 2

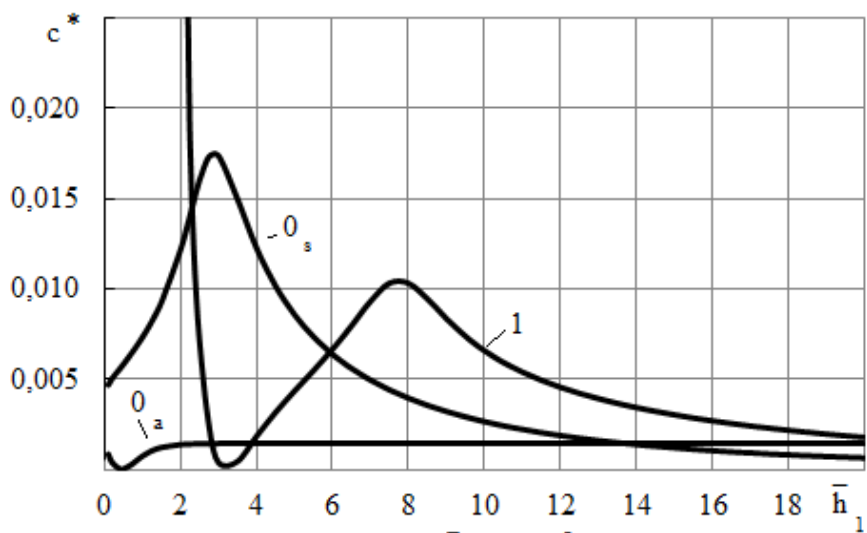


Рисунок 3

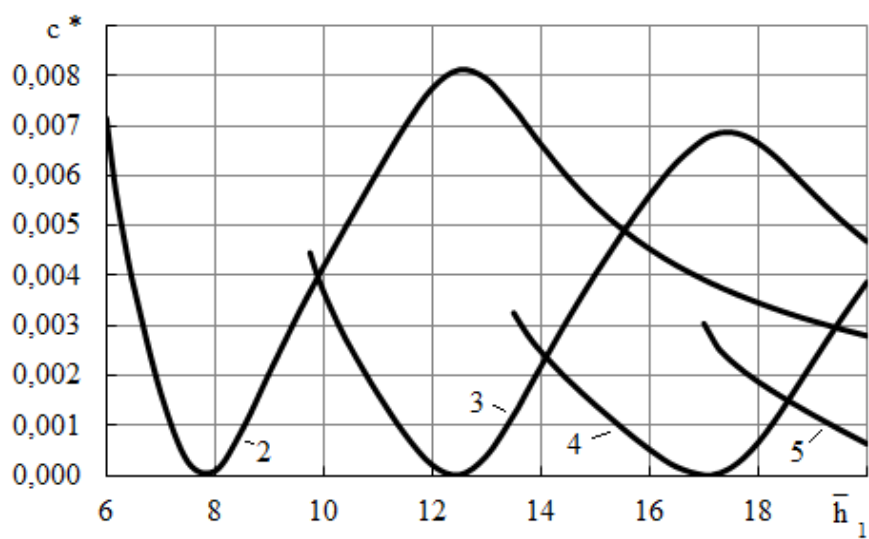


Рисунок 4

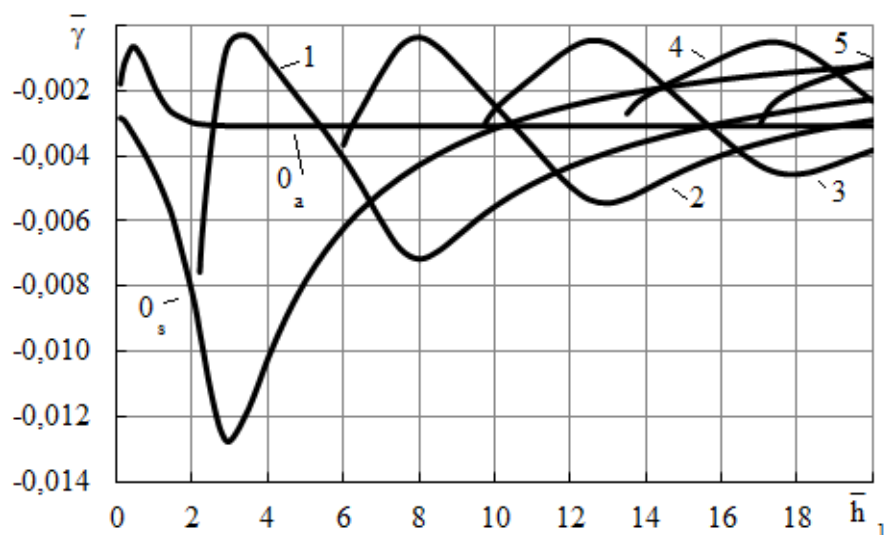


Рисунок 5

Графіки для гідропружної системи, які наведені на рис. 2, для випадку тонкого шару з $\bar{h}_2=2$, що розглядається тут, показують, що при зростанні товщини рідкого шару швидкість нульової антисиметричної моди прямує до величини, яка менше швидкості хвилі Стоунлі. Швидкості нульової симетричної моди і всіх вищих мод, породжуваних шаром рідини, прямують до швидкості поширення звуку в рідкому середовищі.

Висновки. З графічного матеріалу, представленого на малюнках, безпосередньо випливає, що для всіх мод, окрім нульової симетричної моди, існують рідкі шари певної товщини та певні частоти, для яких вплив в'язкості рідини на фазові швидкості нормальних мод є мінімальним і незначним.

ЛІТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / Викторов И.А. – М.: Наука, 1981. – 288с.
2. Багно А.М. Упругие волны в предварительно напряжённых телах, взаимодействующих с жидкостью: обзор / Багно А.М., Гузь А.Н. // Прикладная механика. – 1997. – 33, № 6. – С.3-39.
3. Ottenio M. Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid / Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W. // Int. Journal of Non-Linear Mech. – 2007. – 42, № 2. – P.310-320.
4. Волькенштейн М.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела / Волькенштейн М.М., Левин В.М. // Акустический журнал. – 1988. – 34, № 4. – С.608-615.
5. Гузь А.Н. О задачах аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями / Гузь А.Н. // Прикладная механика. – 1980. – 16, № 3. – С.3-21.
6. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х томах / Гузь А.Н. – К.: Наукова думка, 1986.
7. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости / Гузь А.Н. – К.: А.С.К., 1998. – 350с.
8. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / Гузь А.Н. – К.: А.С.К., 2004. – 672с.
9. Guz A.N. Compressible, viscous fluid dynamics (review). Part 1 // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, № 1. – P.14-39.
10. Guz A.N. The dynamics of a compressible viscous liquid (review). II // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, № 3. – P.281-302.

11. Селезов И.Т. Распространение поверхностных волн в слое жидкости над упругим полупространством / Селезов И.Т., Савченко С.А., Хатунцева З.В. // Динамические системы. – 2006. – № 20. – С.50-58.
12. Гринченко В.Т. Поверхностные волны в системе упругий слой на жидком полупространстве / Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. // Акустичний вісник. – 2005. – Т. 8, № 4. – С.38-45.

Надійшла до редколегії 29.09.2014.

УДК 539.3

ВАСИЛЬЄВА Л.Я., к. фіз.-мат. н.

Миколаївський національний університет

КОМБІНОВАНЕ ТЕРМОМЕХАНІЧНЕ ІМПУЛЬСНЕ НАВАНТАЖЕННЯ ПІВПРОСТОРУ З ВРАХУВАННЯМ МІКРОСТРУКТУРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ В МАТЕРІАЛІ

Вступ. При імпульсній обробці елементів конструкцій або потужними лазерами, або проковуванням реалізується достатньо складний термомеханічний процес, який фактично є комбінацією теплового і механічного імпульсного впливу на тіло [4].

Імпульсне механічне навантаження, як правило, прикладається до тіла в умовах підвищеної температури. В свою чергу, термомеханічний вплив на матеріал при опроміненні реалізується, як правило, через два основні механізми. За першим з них, внаслідок дії потужного імпульсу частина матеріалу поверхні випаровується, утворюючи плазму, яка внаслідок розширення генерує хвилю стискування, що поширюється всередину об'єкта. За другим механізмом відбувається швидкий розігрів матеріалу і наступне поступове охолодження з великими градієнтами температури [2]. Додатковим ускладнюючим фактором в таких задачах може бути зміна мікроструктурного стану матеріалу при швидкому розігріві та поступовому охолодженні конструкції.

Вплив імпульсного температурного навантаження на властивості матеріалу і поведінку конструкції досліджують експериментально [8]. Проте чисельне моделювання дозволяє проаналізувати як загальні, так і конкретні особливості взаємодії механічних і теплових полів в широкому інтервалі параметрів задачі.

Для дослідження взаємодії механічних і теплових полів при таких комбінованих навантаженнях використовується динамічна постановка задачі із залученням узагальненої узгодженої з термодинамікою незворотних процесів моделі фізично нелінійної поведінки матеріалів в широкому діапазоні температур, модифікованої для врахування мікроструктурних перетворень (МСП) [3].

В рамках розглянутої постановки досліджується задача про дію комбінованого навантаження: теплового імпульсу та імпульсу напружень на півпростір. При цьому вважаємо, що термомеханічний вплив на матеріал не супроводжується зміною агрегатного стану. Задача розв'язується за допомогою методики скінчених елементів, розвинутої для моделювання зв'язаної термомеханічної поведінки фізично нелінійних матеріалів [3]. Вивчаються особливості термомеханічного та мікроструктурного станів, які виникають у процесі дії імпульсу, та залишкового напружено-деформованого стану, що формується при наступному поступовому охолодженні.

Модель мікроструктурних перетворень. Для описання поведінки матеріалу в умовах підвищених температур при великих швидкостях деформування використову-