

## РОЗДІЛ «РАДІОЕЛЕКТРОНІКА»

УДК 621.396.67

СЬЯНОВ А.М., д.т.н., професор  
КОСУХИНА Е.С., к.т.н., доцент  
ГНАТЮК М.А., інженер  
БЕЛОБОРОВОДА Е.Н., магістр

Дніпродзержинський державний технічний університет

### РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

**Введение.** В настоящее время в связи с интенсивным развитием вычислительной техники широкое распространение получили различные приближенные методы решения задач электродинамики. При этом наибольшее внимание уделяется методам, которые при меньшей точности обладают большей универсальностью. Наиболее известным из таких методов есть метод конечных элементов. Однако существенным его недостатком является сравнительно большое время, необходимое для анализа СВЧ структур. Причиной тому есть лежащая в основе метода дискретизация всей области определения поля. Непрямые методы являются альтернативным направлением в решении задач электродинамики. Наиболее известным среди них является метод моментов [1]. В этом случае дискретизации подвергается лишь поверхность исследуемой структуры, а не все пространство, что снижает размерность задачи. В этом случае задача представляется в виде интегрального уравнения, которое и решается методом моментов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим алгоритм метода моментов на примере электростатической задачи.

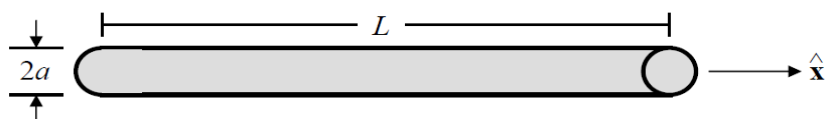


Рисунок 1 – Заряженный тонкий проводник

На рис.1 показан идеально проводящий тонкий проводник длиной  $L$  и радиусом  $a$ , расположенный вдоль оси  $Ox$ . Если радиус проводника

намного меньше его длины, то его электрический потенциал может быть представлен в виде интегрального уравнения, где неизвестной является функция плотности заряда, а именно:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_0^L \frac{q(x')}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} dx', \quad (1)$$

где

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Разобьем провод на  $N$  равных сегментов длиной  $\Delta$  каждый (рис.2). В пределах каждого сегмента примем, что плотность заряда принимает постоянное значение. Таким образом, функция  $q(r)$  является кусочно-постоянной по длине провода. Это можно представить в следующем виде:

$$q(x') = \sum_{n=1}^N a_n f_n(x'), \quad (2)$$

где  $a$  – неизвестные весовые коэффициенты, а  $f_n(x')$  – импульсная функция, постоянная в пределах одного сегмента и равная нулю за его пределами:

$$f_n(x') = \begin{cases} 0, & x' < (n-1)\Delta_n \\ 1, & (n-1)\Delta_n \leq x' \leq n\Delta_n \\ 0, & x' \geq n\Delta_n \end{cases} \quad (3)$$

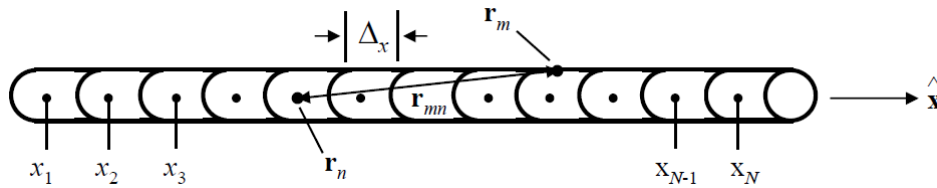


Рисунок 2 – Разбиение исследуемой области на сегменты

Примем потенциал провода равным  $\varphi(r)=1$  Вольт. Подставляя (2) в (1), получим:

$$1 = \int \sum_{n=1}^N a_n f_n(x') \frac{1}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} dx' \quad (4)$$

Используя выражение для импульсной функции (3), можно записать

$$1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N a_n \int_{(n-1)\Delta_x}^{n\Delta_x} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' \quad (5)$$

Мы получили сумму интегралов по области каждого сегмента. Зафиксируем точки источников на оси проводника и точки наблюдения на его поверхности. Знаменатель в подынтегральной функции примет вид:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + a^2}.$$

Тогда (5) можно записать

$$4\pi\epsilon = a_1 \int_0^{\Delta_x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + a^2}} dx' + a_2 \int_{\Delta_x}^{2\Delta_x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + a^2}} dx' + \dots + a_N \int_{(N-1)\Delta_x}^{N\Delta_x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + a^2}} dx'$$

что представляет собой одно уравнение с  $N$  неизвестными. Это уравнение можно решить, представив его в виде  $N$  уравнений с  $N$  неизвестными. Для этого мы выберем  $N$  независимых точек наблюдения на поверхности провода, каждая в середине соответствующего сегмента. Это позволяет получить следующее:

$$4\pi\epsilon = a_1 \int_0^{\Delta_x} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x')^2 + a^2}} dx' + \dots + a_N \int_{(N-1)\Delta_x}^{N\Delta_x} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x')^2 + a^2}} dx'$$

$$\vdots$$

$$4\pi\epsilon = a_1 \int_0^{\Delta_x} \frac{1}{\sqrt{(x_N - x')^2 + a^2}} dx' + \dots + a_N \int_{(N-1)\Delta_x}^{N\Delta_x} \frac{1}{\sqrt{(x_N - x')^2 + a^2}} dx'$$

что представляет уравнение в матричном виде  $Za = b$  :

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N1} & z_{N2} & \dots & z_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы  $Z_{mn}$  определяются из выражения

$$4\pi\epsilon = a_1 \int_{(1-n)\Delta_x}^{n\Delta_x} \frac{1}{\sqrt{(x_m - x')^2 + a^2}} dx'.$$

Элементы матрицы  $b_m$  равны:

$$b_m = 4\pi\epsilon.$$

На рис.3 показано распределение плотности заряда вдоль проводника для случаев разбиения на 15 и на 100 сегментов. Видно, что при увеличении числа сегментов возрастает и точность решения. Однако, поскольку при решении задачи использовался одинаковый размер для всех сегментов, то на краях проводника точность решения ниже, чем в центре. Это объясняется тем, что у концов проводника величина плотности заряда меняется более интенсивно, чем в середине.

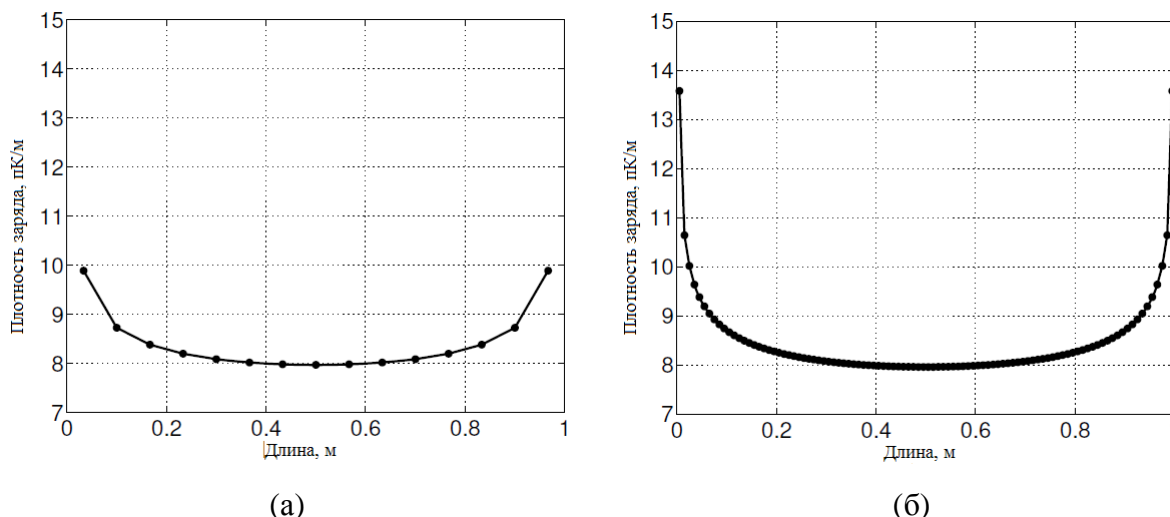


Рисунок 3 – Распределение плотности заряда вдоль проводника при разбиении на 15 (а) и на 100 (б) сегментов

Рассмотренный метод можно распространить и на интегральные уравнения теории антенн. Рассмотрим алгоритм решения задачи об излучении электромагнитной

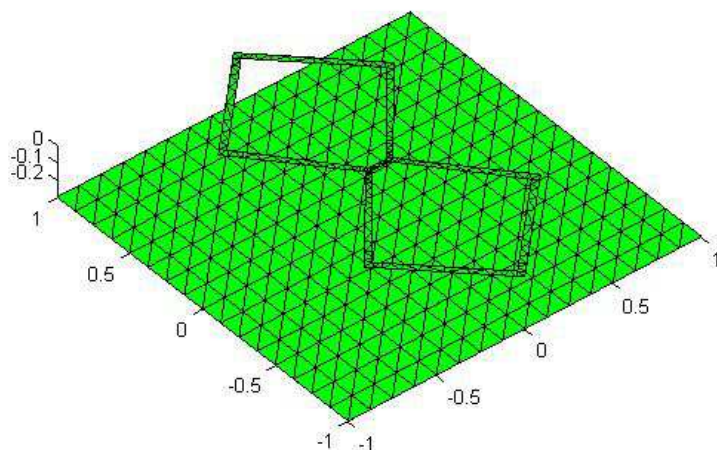


Рисунок 4 – Пример представления антенны в виде множества простых элементов

волны проволочной антенной. Излучающая поверхность антенны также представляется в виде плоской, бесконечно тонкой пластины (полосы), которая в свою очередь разбивается на множество сегментов – треугольников (рис.4), а в качестве базисной функции  $f_n(r')$  используется RWG-функция [2].

Распределение токов на поверхности антенны представляется в следующем виде:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^M I_n \vec{f}_n(\vec{r}), \quad (5)$$

где  $M$  – количество элементов;  $I_n$  – весовые коэффициенты, определяемые как  $Z \cdot I = V$ , где  $Z$  – матрица сопротивлений размерностью  $M \times M$ ;  $V$  – напряжение возбуждения.

RWG функция [2-4] имеет следующий вид:

$$\vec{f}_n(\vec{r}') = \begin{cases} \frac{L_n}{2A_n^+} (\vec{r}' - \rho_n^+), \vec{r}' \in T_n^+ \\ \frac{L_n}{2A_n^-} (\vec{r}' - \rho_n^-), \vec{r}' \in T_n^- \\ 0, \vec{r}' \notin T_n^+ \cup T_n^- \end{cases}, \quad (6)$$

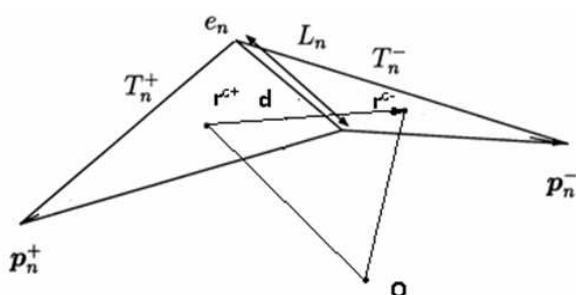


Рисунок 5 - RWG-базисная функция

где  $A_n^\pm$  – площадь треугольника  $T_n^\pm$ ;  $L_n$  – длина общей границы  $e_n$ ;  $p_n^\pm$  – свободная вершина треугольника  $T_n^\pm$ . Определение RWG базисной функции показано на рис.5.

Если элементы  $m$  и  $n$  представить как диполи конечных размеров, то матрица  $Z$  описывает влияние диполя  $n$  на ток диполя  $m$  и наоборот. Размер матрицы сопротивлений соответствует количеству RWG-элементов. Выражение

для матрицы сопротивлений имеет вид:

$$Z_{mn} = l_m \left[ j\omega \left( \bar{A}_{mn}^+ \cdot \frac{\bar{\rho}_m^{C+}}{2} + \bar{A}_{mn}^- \cdot \frac{\bar{\rho}_m^{C-}}{2} \right) + \Phi_{mn}^- - \Phi_{mn}^+ \right], \quad (7)$$

где индексы  $m$  и  $n$  соответствуют двум RWG-элементам;  $l_m$  – длина элемента;  $\rho$  – вектор между свободной вершиной  $p_n^\pm$  и центральной точкой  $r^{c\pm}$  треугольников.

Выражения для векторного потенциала  $A$ , скалярного потенциала  $\Phi$  и функции Грина имеют вид:

$$\bar{A}_{mn}^{\pm} = \frac{\mu}{4\pi} \left[ \frac{l_n}{2A_n^+ T_n^+} \int_{T_n^+} \bar{\rho}_n^{C^+}(\bar{r}') g_m^{\pm}(\bar{r}') dS' + \frac{l_n}{2A_n^- T_n^-} \int_{T_n^-} \bar{\rho}_n^{C^-}(\bar{r}') g_m^{\pm}(\bar{r}') dS' \right]; \quad (8)$$

$$\Phi_{mn}^{\pm} = -\frac{1}{4\pi j \omega \epsilon} \left[ \frac{l_n}{A_n^+ T_n^+} \int_{T_n^+} g_m^{\pm}(\bar{r}') dS' + \frac{l_n}{A_n^- T_n^-} \int_{T_n^-} g_m^{\pm}(\bar{r}') dS' \right]; \quad (9)$$

$$g_m^{\pm}(\bar{r}') = \frac{\exp(-jk|\bar{r}_m^{C^{\pm}} - \bar{r}'|)}{|\bar{r}_m^{C^{\pm}} - \bar{r}'|}. \quad (10)$$

На основе полученного распределения плотности тока по поверхности антенны и определяются её основные параметры.

Используя описанный выше алгоритм, выполнено моделирование зигзагообразной антенны, расположенной над металлическим экраном (рис.4). Целью моделирования является исследование характеристик такой антенны для оценки возможности её применения в системах беспроводной передачи данных и приема сигналов цифрового телевидения стандарта DVB-T2.

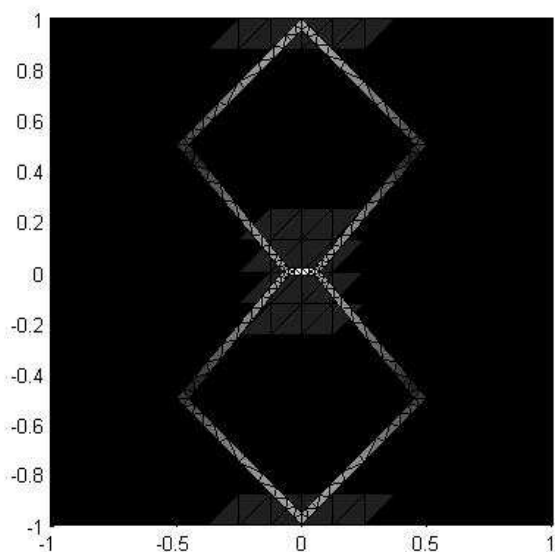


Рисунок 6 – Распределение плотности тока по поверхности антенны

**Результаты работы.** На рис.6 представлено распределение плотности тока по поверхности антенны. Светлые участки соответствуют большей плотности, темные – меньшей. Поле излучения антенны, а также ее основные параметры можно вычислить, используя найденное распределение поверхностных токов.

Поле, излучаемое антенной, рассчитывается с использованием метода, называемого дипольной моделью. В этом случае распределение тока каждого RWG-элемента представляется в виде бесконечно малого диполя, имеющего некий эквивалентный момент. Поле излучения диполя определяется известным аналитическим выражением [5]. Общее поле излучения получается суммированием всех

полей, излучаемых бесконечно малыми диполями. Диаграммы направленности для рассматриваемой антенны, рассчитанные по описанной методике для частоты 107 МГц, приведены на рис.7.

Входное сопротивление является одним из наиболее важных параметров антенны. Оно определяется отношением напряжения к току в точке питания антенны и является комплексным. График частотной характеристики действительной и мнимой части входного сопротивления антенны показан на рис.8. Диапазон частот, для которых производился расчет, составлял 50-250 МГц.

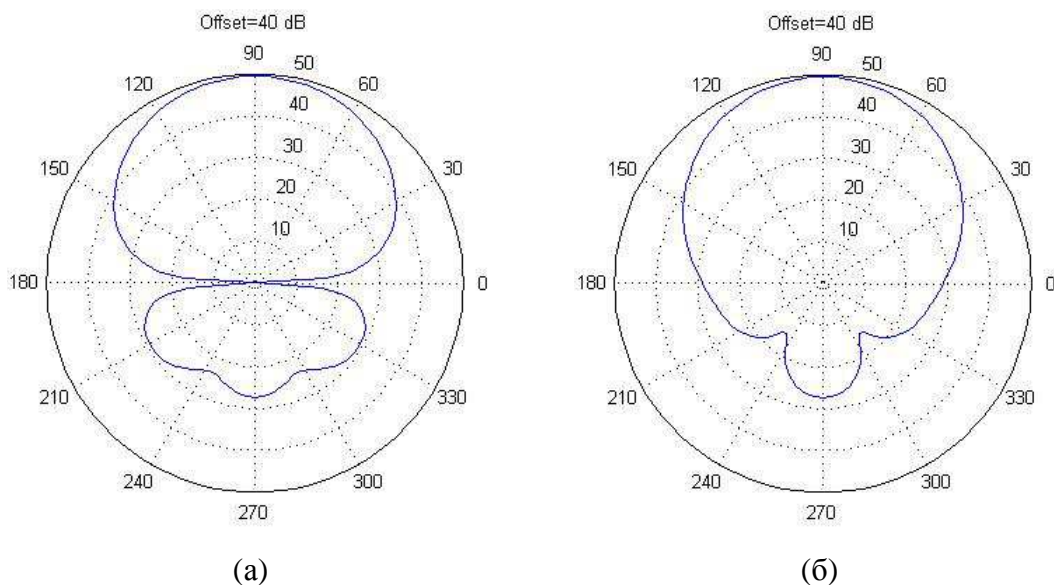


Рисунок 7 – Диаграммы направленности антенны в плоскостях XZ (а) и YZ (б)

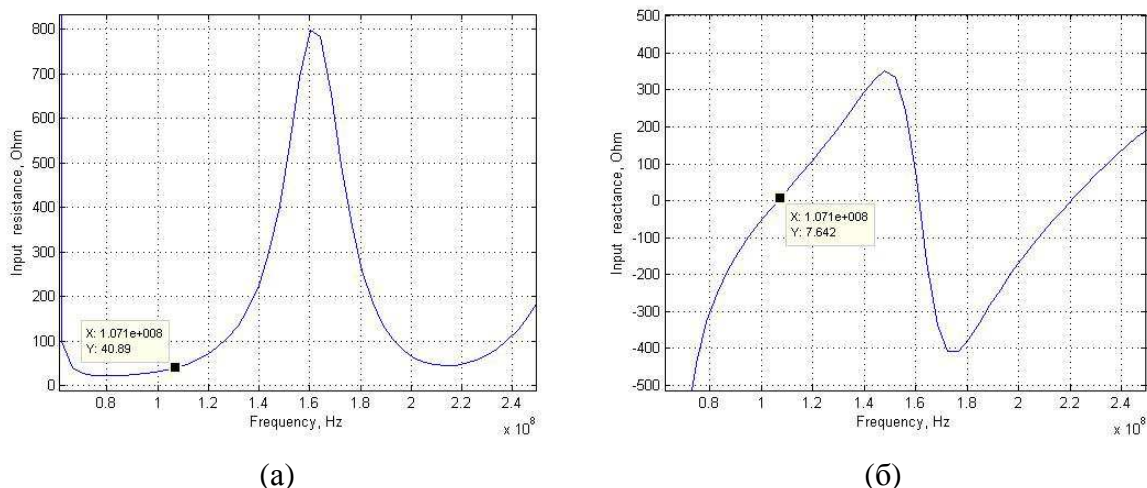


Рисунок 8 – Частотная характеристика действительной (а) и мнимой (б) части входного сопротивления антенны

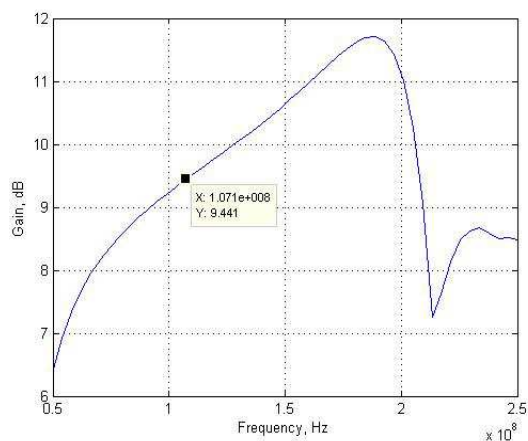


Рисунок 9 – Частотная характеристика усиления антенны

Распределение тока рассчитывалось отдельно для каждой точки частотной характеристики, что позволяет использовать эти данные и для построения частотной характеристики усиления антенны в диапазоне 50-250 МГц (рис.9).

**Выводы.** В работе представлен алгоритм решения интегральных уравнений электродинамики методом моментов с использованием RWG-базисной функции. В применении к расчету излучающих устройств данный алгоритм позволяет определить основные их параметры, а именно: распределение тока на элементах, входной импеданс, усиление и диа-

грамма направленности, а также изменение этих параметров в заданной частотной области, представленные в виде графиков. Алгоритм, представленный в работе, может быть применен к металлическим антеннам произвольной конфигурации, поскольку от геометрических параметров исследуемого объекта зависит только количество RWG-элементов и, следовательно, время, затрачиваемое на вычисления, а сам алгоритм при этом остается неизменным. Особенностью данного метода является представление металлических элементов антенны в виде бесконечно тонкой пластины, что позволяет производить моделирование структур, одновременно содержащих как поверхности, так и цилиндрические проводники без изменения вида интегрального уравнения и базисных функций и, следовательно, без необходимости в построении двух отдельных алгоритмов для каждой из моделей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Harrington R.F. Field Computation by Moment Method. Macmillan / Harrington R.F. – New York, 1968. – 352p.
2. Rao S.M. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape / Rao S.M., Wilton D.R., Glisson A.W. // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 1982. – № 3 (30). – P.409-418.
3. Makarov S. Antenna and EM modeling with MATLAB / Makarov S. – Wiley-Interscience, 2002. – 274p.
4. Gibson Walton C. The method of moments in electromagnetic / Walton C.Gibson. – Chapman & Hall / CRC, 2008. – 272p.
5. Balanis C.A. Antenna Theory: Analysis and Design, 2nd ed. / Balanis C.A. – Wiley, New York, 1997. – 1136p.

*Поступила в редколлегию 24.02.2014.*

УДК 621.396

МАРЧЕНКО С.В., ст. преподаватель  
КАЛИСТРАТОВ А.А., студент

Днепродзержинский государственный технический университет

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОДНОЙ ФАЗИРОВАННОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ С СОГЛАСУЮЩЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ**

**Введение.** Согласование волноводных фазированных антенных решеток (ФАР) с внешним пространством излучения является актуальной задачей проектирования данного типа антенн, что связано с уменьшением используемой электрической энергии, преобразуемой в энергию СВЧ электромагнитного поля. В работах [1, 2] представлены результаты математического моделирования ФАР из плоскопараллельных волноводов с согласующим устройством (СУ) в виде резонаторной области связи излучателей. Проведено исследование свойств такого СУ для случая конечных плоскопараллельных ФАР в Е-плоскости [3]. В этих работах показана целесообразность использования внутренней резонаторной области связи излучателей для согласования ФАР со свободным пространством. Таким образом, математическое моделирование ФАР из прямоугольных волноводов с согласующим устройством подобного типа является актуальной научной задачей.

**Постановка задачи.** Целью работы является математическое моделирование бес-