УДК 669.162.1 МНЫХ А.С., к.т.н., доцент

Запорожская государственная инженерная академия

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЕДИНИЧНОМ ОБЪЕМЕ АГЛОМЕРАЦИОННОГО СЛОЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Введение. Текущий уровень развития вычислительной техники дает возможность исследователю решать с помощью ЭВМ прикладные задачи широкого класса. Не смотря на то, что эксперимент по-прежнему является решающим критерием правильности того или иного конструкторского решения, возможности анализа физических процессов путем использования численных методов, предоставляемые современными программными продуктами, таковы, что позволяет получать решения с высокой степенью согласуемости с экспериментальными данными.

К числу эффективных методов решения задач математической физики относится метод конечных элементов (МКЭ). За счет своих особенностей (однородности формы конечных элементов, большого числа нулевых элементов глобальной матрицы и др.) данный метод является легко реализуемым на ЭВМ. В настоящий момент абсолютное большинство программных пакетов, предлагаемых различными разработчиками специализированного программного обеспечения для инженерных расчетов, в том числе и широко известный пакет Ansys, в качестве математического аппарата использует именно МКЭ [1].

Постановка задачи. На базе МКЭ описать математическую модель в трехмерной постановке с целью нахождения распределения температуры в единичном конечном элементе агломерируемого слоя. Провести сравнение результатов расчета температуры по представленной в работе методике и посредством вычисления в программном продукте Ansys с целью подтверждения правильности математического описания процесса.

Результаты работы. В данной работе рассматривается задача о нахождении распределения температуры в единичном, конечном элементе слоя агломерата. Схематически срез спекаемого агломерационного слоя на паллете агломашины представлен на рис.1.

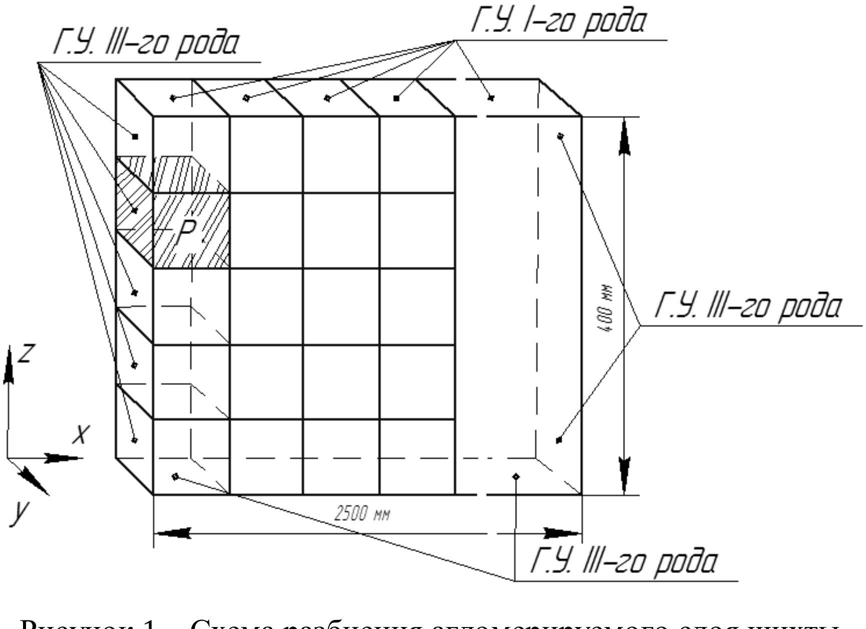

Рисунок 1 – Схема разбиения агломерируемого слоя шихты

Сформулируем математическую постановку задачи теплопроводности. Имеем слой материала заданной плотности, разбитый по ширине и высоте на единичные объемы (области), сверху действует источник постоянной температуры, по бокам и внизу слой контактирует с внешней средой посредством конвективного теплообмена. Объемная плотность распределения внутренних источников тепла, представленных в виде распределенного в слое топлива, выражается как функция координат с распределением $Q(x,y,z)$.

Математическая постановка задачи включает уравнение теплопроводности с внутренними источниками тепла, начальные и граничные условия:

$$\rho c\frac{dT}{dt}=\lambda\frac{d^2T}{dx^2}+\lambda\frac{d^2T}{dy^2}+\lambda\frac{d^2T}{dz^2}+Q\left(x,y,z\right), \tag{1}$$

Н.У.: $t_0=0T_i\left(x,y,z\right)=T_0,$

Г.У.: $z=z_0T_i\,|_{\Gamma 1}=T_{зажиг},t>0,$

$$x=x_0-\lambda\frac{dT_i}{dt}|_{\Gamma 2}=k_1\left(T_i\left(x,y,z\right)-T_{o.c.}\right),t>0,$$

$$x=x_n\lambda\frac{dT_i}{dt}|_{\Gamma 3}=k_2\left(T_i\left(x,y,z\right)-T_{o.c.}\right),t>0,$$

$$z=z_n-\lambda\frac{dT_i}{dt}|_{\Gamma 4}=k_3\left(T_i\left(x,y,z\right)-T_{o.c.}\right),t>0,$$

где T_i – температура в конечном объеме, ºС; $T_{o.c.}$ – температура окружающей среды, ºС; $T_{зажиг}$ – температура зажигания, ºС; k – коэффициент теплообмена, Вт/(м²·ºС); λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·ºС); ρ – плотность материала, кг/м³; c – удельная теплоемкость Дж/(кг·ºС); Q – мощность внутренних источников Вт/м³; t – время, с.

Для аппроксимации функции T в нумерованных узлах области P с границами $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4$ выберем систему базисных функций $N_m, m=\overline{1,M}$, с помощью которых построим приближенное решение:

$$\bar{T}\approx\sum_{m=1}^{M}T_mN_m. \tag{2}$$

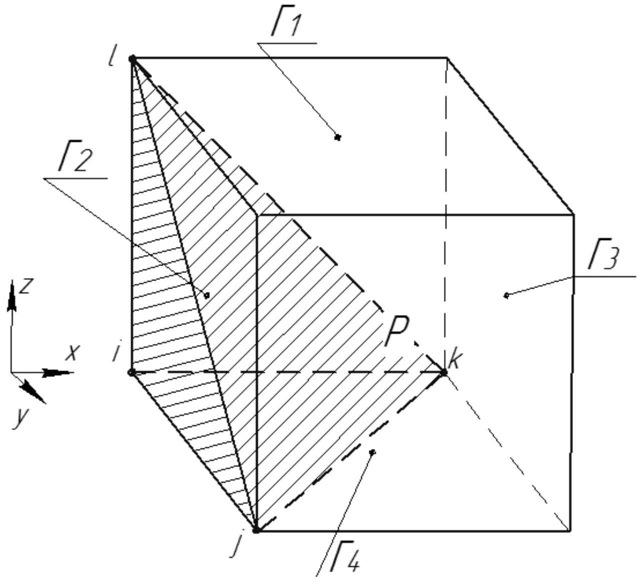

Рисунок 2 – Разбивка единичной, расчетной области на конечные элементы

В трехмерном случае в качестве конечных элементов можно использовать тетраэдры (рис.2) с нумерованными узлами в вершинах i,j,k,l. Если расчетная область разбита на тетраэдры, то базисные функции, ассоциируемые с каждым нумерованным узлом конечного элемента P^g, формируются в виде линейных функций переменных x,y,z.

Для узла i базисная функция примет вид:

$$N_i^g\left(x,y,z\right)=a_i^g+b_i^gx+c_i^gy+d_i^gz.$$

Базисные функции в узлах j,k,l определяются аналогично [2-4, 7, 8]. Таким образом формируется система линейных, алгебраических уравнений для определения коэффициентов $a_i^g, b_i^g, c_i^g, d_i^g$ базисных функций $N_i^g(x,y,z)$:

$$a_i^g = \frac{\Delta_a^g}{6V^g}; b_i^g = \frac{\Delta_b^g}{6V^g}; c_i^g = \frac{\Delta_c^g}{6V^g}; d_i^g = \frac{\Delta_d^g}{6V^g},$$

где V^g – объем конечного элемента (тетраэдра), м³.

$$V^g = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{bmatrix}; \Delta_a^g = \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{bmatrix};$$

$$b_i^g = -\begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{bmatrix}; c_i^g = -\begin{bmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_l & z_l \end{bmatrix}; d_i^g = -\begin{bmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_l & z_l \end{bmatrix}.$$

Вектор базисных функций для элемента задается как $N = \left[N_i, N_j, N_k, N_l\right]$. Если узловые значения искомой функции $T_m, m = i, j, k, l$ станут известными, то значения функции $T(x,y,z)$ во внутренних точках элемента P^g определяются с помощью функции элемента:

$$\bar{T}^g = T_i^g N_i^g + T_j^g N_j^g + T_k^g N_k^g + T_l^g N_l^g. \tag{3}$$

Если подставить приближенное решение (3) в (2), то результатом будет не тождественный ноль, а некоторая функциональная невязка $G_P(x,y,z)$ по расчетной области *P* и невязка $G_L(x,y,z)$ по границе *Г*.

$$G_P(x,y,z) = \rho c \frac{d\bar{T}}{dt} - \lambda\left(\frac{d^2\bar{T}}{dx^2} + \frac{d^2\bar{T}}{dy^2} + \frac{d^2\bar{T}}{dz^2}\right) - Q(x,y,z)$$

$$G_L(x,y,z) = \lambda \frac{d\bar{T}}{dn}\Big|_{\Gamma}. \tag{4}$$

Согласно метода взвешенных невязок [5] необходимо обеспечение ортогональности функциональных невязок и специальным образом подобранных весовых функций $W_S(x,y,z), S = \overline{1,M}$ для невязки $G_P(x,y,z)$ и $\bar{W}_S(x,y,z), S = \overline{1,M}$ – для невязки $G_L(x,y,z)$. Для непрерывных функций $G_P(x,y,z)$ и $G_L(x,y,z)$ это означает равенство нулю суммы тройного и криволинейного интегралов соответственно по области и границе:

$$(G_P, W_S) + (G_L, \bar{W}_S) = \iiint_P \left[\rho c \frac{d\bar{T}}{dt} - \lambda\left(\frac{d^2\bar{T}}{dx^2} + \frac{d^2\bar{T}}{dy^2} + \frac{d^2\bar{T}}{dz^2}\right) - Q(x,y,z)\right]\cdot$$

$$\cdot W_S\left(x,y,z\right)dxdydz+\int_L\left[\lambda\frac{d\bar{T}}{dn}|_\Gamma\right]\bar{W}_S\,d\Gamma=0\quad S=\overline{1,M}\,,\qquad 5)$$

где $W_S\left(x,y,z\right)$ – весовые функции для внутренних узлов расчетной области $S=\overline{1,M}$,

$\bar{W}_S\left(x,y,z\right)$ – весовые функции для граничных узлов расчетной области.

В соответствии с методом Галеркина взвешенных невязок весовые функции равны базисным: $W_S=N_S$, $\bar{W}_S=\bar{N}_S$. Таким образом, подставляя (5) в (2) и применяя к полученному выражению формулу Грина, получаем формулировку конечно-элементного метода Галеркина:

$$\sum_{m=1}^{M}T_m\left[\int_V\rho c\frac{d\bar{T}}{dt}N_SN_mdV+\int_V\left(\frac{dN_S}{dx}\left(\lambda\frac{dN_m}{dx}\right)+\frac{dN_S}{dy}\left(\lambda\frac{dN_m}{dy}\right)+\frac{dN_S}{dz}\left(\lambda\frac{dN_m}{dz}\right)\right)dV\right]=$$

$$=\int_V Q\left(x,y,z\right)N_SdV,\quad S=\overline{1,M}.\qquad 6)$$

Система (6) является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которую можно представить в матричной форме:

$$\left[R\right]\cdot\left[T\right]=\left[F\right],\qquad (7)$$

где R – глобальная матрица теплопроводности,

T – вектор-столбец, состоящий из температур в узлах элементов,

F – глобальный вектор тепловой нагрузки.

Для конечного элемента g система уравнений МКЭ запишется в виде:

$$[r^g]\cdot[t^g]=[\varphi^g],\qquad (8)$$

где $r^g=\begin{bmatrix}r_{ii}&r_{ij}&r_{ik}&r_{il}\\r_{ji}&r_{jj}&r_{jk}&r_{jl}\\r_{ki}&r_{kj}&r_{kk}&r_{kl}\\r_{li}&r_{lj}&r_{lk}&r_{ll}\end{bmatrix}$ – локальная матрица теплопроводности;

$\varphi^g=\begin{bmatrix}\varphi_i\\\varphi_j\\\varphi_k\\\varphi_l\end{bmatrix}$ – локальный вектор тепловой нагрузки.

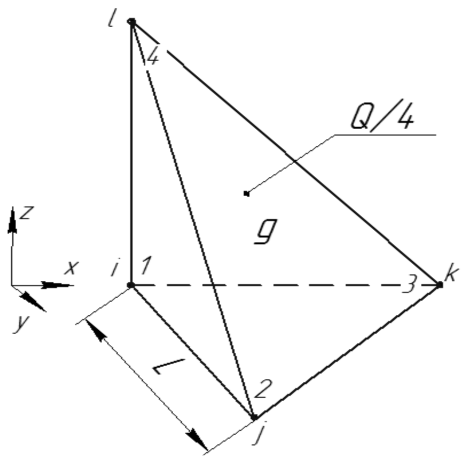

Рисунок 3 – Конечный элемент g тетраэдральной формы

Рассмотрим случай для конечного элемента g, представленного тетраэдром (рис.3), когда на всех гранях присутствует конвективный теплообмен и объемное тепловыделение.

Локальный вектор тепловой нагрузки в случае, когда на всех гранях элемента g приложен конвективный теплообмен и присутствуют внутренние источники тепла, запишется в виде:

$$\varphi^{g}=\frac{Q}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\frac{T_{ij}\alpha_{ij}L_{ij}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{T_{ik}\alpha_{ik}L_{ik}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{T_{il}\alpha_{il}L_{il}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{T_{jk}\alpha_{jk}L_{jk}}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{T_{kl}\alpha_{kl}L_{kl}}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}+\frac{T_{li}\alpha_{li}L_{li}}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Локальную матрицу теплопроводности для конечного элемента g при наличии на каждой грани конвективного теплообмена запишем следующим образом:

$$r^{g}=\lambda_{x}V^{g}\begin{bmatrix}a_{ii}&a_{ji}&a_{ki}&a_{li}\\a_{ij}&a_{jj}&a_{kj}&a_{lj}\\a_{ik}&a_{jk}&a_{kk}&a_{lk}\\a_{il}&a_{jl}&a_{kl}&a_{ll}\end{bmatrix}+\lambda_{y}V^{g}\begin{bmatrix}b_{ii}&b_{ji}&b_{ki}&b_{li}\\b_{ij}&b_{jj}&b_{kj}&b_{lj}\\b_{ik}&b_{jk}&b_{kk}&b_{lk}\\b_{il}&b_{jl}&b_{kl}&b_{ll}\end{bmatrix}+\lambda_{z}V^{g}\begin{bmatrix}c_{ii}&c_{ji}&c_{ki}&c_{li}\\c_{ij}&c_{jj}&c_{kj}&c_{lj}\\c_{ik}&c_{jk}&c_{kk}&c_{lk}\\c_{il}&c_{jl}&c_{kl}&c_{ll}\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{\alpha_{ij}L_{ij}}{6}\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{\alpha_{ik}L_{ik}}{6}\begin{bmatrix}2&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{\alpha_{il}L_{il}}{6}\begin{bmatrix}2&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&2\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{\alpha_{jk}L_{jk}}{6}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&2&1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\frac{\alpha_{kl}L_{kl}}{6}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}+\frac{\alpha_{li}L_{li}}{6}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&2\end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Значения температуры в узлах конечного элемента получим из выражения:

$$\left[t^{g}\right]=\left[r^{g}\right]^{-1}\cdot\left[\varphi^{g}\right]. \qquad (11)$$

Для построения глобальных матриц R,T,F необходимо локальным номерам узлов i,j,k,l каждого элемента g поставить в соответствие глобальные номера узлов $m,\ m=\overline{1,M}$. Расширенные таким образом матрицы складываются, и в результате ансамблирования получаем глобальные матрицы. Поставляя последние в формулу (7), рассчитываем распределение температуры по узлам рассматриваемой области.

Выводы. Моделирование распределения температуры в единичном элементе проводилось в программном пакете Ansys при грубом качестве сетки и вручную с использованием программы MathLab для конечного элемента того же размера и с теми же граничными условиями. Рассчитанное значение температуры на поверхности элемента в пакете Ansys составило 366ºС, расчет по вышеизложенной методике показал температуру в 366,8133ºС, таким образом, ошибка расчета составила σ = 0,22. Приведенные данные численного моделирования показывают, что при решении методом МКЭ, используемого в том числе в качестве математического аппарата в системе Ansys, задач конвективного теплообмена с заданными граничными условиями можно достигнуть хорошего соответствия численного и теоретического расчета.

Приведенная методика позволяет создать модель всего агломерируемого слоя с наложенными на него граничными условиями; зная распределение химических компонентов и внешних тепловых источников по высоте и ширине моделируемого слоя [10], можно рассчитать распределение температуры в агломерате. Кроме того, данная модель позволит оценить влияние сегрегации компонентов шихты на температурный режим процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конечно-элементное моделирование тепловых процессов в программной среде ANSYS: методические указания к лабораторной работе / сост. Трудоношин В.А., Носко А.П. – М.: МГТУ, 2005. – 54с.
2. Румянцев А.В. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности: учеб. пос. / Калининград: Калинигр. ун-т, 1995. – 170с.
3. Метод конечных элементов: учеб. пос. для вузов / под ред. П.М.Варвака. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1981. – 176с.
4. Применение метода конечных элементов в решении задач прикладной механики: учеб.-метод. пос. для студентов техн. специальностей / А.О.Шимановский, А.В.Путято. – Гомель: БелГУТ, 2008. – 61с.
5. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / пер. с англ. под ред. В.Д.Виоленского. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 124с.
6. Свет Е.В. Нестационарная задача теплопроводности в трехмерной постановке для многослойных пластин сложной формы / Свет Е.В. // Вісник НТУ „ХПІ”. – 2013. – № 63 (1036). – С.122-131.
7. Введение в метод конечных элементов: методическое пособие / сост. Ю.А.Сагдеева и др. – Ижевск: Изд-во „Удмуртский ун-т”, 2011. – 44с.
8. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики / Клованич С.Ф. – Запорожье: Издательство журнала „Світ геотехніки”, 2009. – 400с.
9. А.А.Фефелов. Оценка квазисингулярных интегралов при численной реализации метода граничных элементов в трехмерных неосеметричных задачах теплопроводности / А.А.Фефелов // Вестник РГРТУ. – 2008. – Вып. 23. – С.41-46.
10. Мных А.С. Исследование химического состава фракций агломерационной шихты для условий комбината „Запорожсталь” / Мных А.С. // Теория и практика металлургии. – 2014. – №3-6. – С.35-38.

Поступила в редколлегию 03.09.2014.