

- Ю.К.Розанов, Е.М.Соколова. – М.: Академия, 2004. – 272с.
6. Моделирование электромеханических систем: підруч. / [О.П.Чорний, А.В.Луговой, Д.Й.Родькін та ін.]. – Кременчук: КДПУ, 2001. – 376с.
7. Сыромятников И.А. Режимы работы асинхронных и синхронных двигателей / под ред. Л.Г.Мамиконянца. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 528с.

Надійшла до редколегії 30.03.2015.

УДК 681.5.03

ВОЛЯНСКИЙ Р.С., к.т.н., доцент  
САДОВОЙ А.В., д.т.н., профессор

Днепродзержинский государственный технический университет

## РАЗРЫВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ

**Введение.** Ряд электромеханических систем в составе технологических процессов и промышленного оборудования характеризуется работой в условиях действия большого количества различных дестабилизирующих факторов, приводящих к изменению их координат и параметров. Этот факт не позволяет использовать большое количество известных методов синтеза систем управления электроприводами, базирующихся на точном знании параметров объекта управления [1]. Поэтому возникает задача синтеза систем управления динамическими объектами, функционирующих в условиях неопределенности.

Задача синтеза управляющего воздействия для линейных объектов с изменяющимися параметрами может быть решена путем использования интервального исчисления [2], которое позволяет оперировать не с точными значениями координат и параметров динамической системы, а с возможными интервалами их изменения. В настоящее время активно развивается управление объектами с неточно определенными параметрами [3], которое позволяет синтезировать модальные регуляторы для объектов с неопределенностью параметров.

С математической точки зрения использование при синтезе системы управления интервального исчисления позволяет перейти от рассмотрения конкретных траекторий движения в некотором фазовом пространстве к изучению областей этого фазового пространства, в которых определены траектории движения объекта, соответствующие всем возможным значениям сочетаний его параметров.

Исследование этих траекторий позволяет сформировать управляющее воздействие, обеспечивающее движение объекта управления по заданной траектории при изменении параметров в наперед заданных пределах, и определяет актуальность работы.

**Постановка задачи.** Целью настоящей работы является синтез релейной системы управления динамическим объектом 2-го порядка, параметры которого определены на некоторых интервалах.

**Результаты работы.** В качестве объекта управления (ОУ) рассмотрим электропривод постоянного тока с отрицательным вязким трением, питающийся от безынерционного преобразователя [4]. Уравнения динамики ОУ имеют вид

$$p\omega = \frac{h}{J}\omega + \frac{c}{J}I; \quad pI = -\frac{1}{T_a}I - \frac{c}{R_a T_a}\omega + \frac{k}{R_a T_a}U_y, \quad (1)$$

где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования,  $h$  – коэффициент отрицательного вязкого трения,  $c$  – конструктивный коэффициент,  $J$  – момент инерции привода,  $R_a, T_a$  – сопротивление и постоянная времени якорной цепи электропривода соответственно,  $k$  – коэффициент усиления управляемого преобразователя,  $U_y$  – напряжение управления.

Приняв в качестве базовых переменных скорость идеального холостого хода  $\omega_0$ , ток короткого замыкания  $I_k$  и максимальное напряжение управления  $U_{y\max}$ , которые связаны между собой соотношениями

$$\omega_0 = \frac{kU_{y\max}}{c}; I_k = \frac{kU_{y\max}}{R_a}, \quad (2)$$

представим уравнения (1) в относительных единицах

$$p y_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2; \quad p y_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + m_2 u, \quad (3)$$

где

$$a_{11} = \frac{h}{J\omega_0}, a_{12} = \frac{cI_k}{J\omega_0}, a_{21} = a_{22} = -\frac{1}{T_a}, m_2 = -a_{22}; \quad (4)$$

$$y_1 = \frac{\omega}{\omega_0}, y_2 = \frac{I}{I_k}, u = \frac{U_y}{U_{y\max}}.$$

В силу соотношений (2) коэффициенты (4) можно представить следующим образом

$$a_{11} = \frac{hc}{JkU_{y\max}}, a_{12} = \frac{c^2}{JR}, a_{21} = a_{22} = -\frac{1}{T_a}, m_2 = \frac{1}{T_a}. \quad (5)$$

Анализ уравнений (1) и (3) совместно с коэффициентами (5) показывает, что траектории движения объекта управления определяются подаваемым на него управляющим воздействием  $U_y$ , всеми параметрами объекта и максимальным управляющим воздействием  $U_{y\max}$ . Это утверждение позволяет перейти от точных уравнений (3) к интервальным уравнениям

$$p Y_1 = A_{11} Y_1 + A_{12} Y_2; \quad p Y_2 = A_{21} Y_1 + A_{22} Y_2 + M_2 U, \quad (6)$$

где

$$Y_1 = [y_{1\min}, y_{1\max}], Y_2 = [y_{2\min}, y_{2\max}], U = [U_{y\min}, U_{y\max}];$$

$$A_{11} = \frac{[h][c]}{[J][k]U_{y\max}} = \left[ \frac{h_{\min} c_{\min}}{J_{\max} k_{\max} U_{y\max}}, \frac{h_{\max} c_{\max}}{J_{\min} k_{\min} U_{y\max}} \right];$$

$$A_{12} = \frac{[c]^2}{[J][R]} = \left[ \frac{c_{\min}^2}{J_{\max} R_{\max}}, \frac{c_{\max}^2}{J_{\min} R_{\min}} \right]; \quad (7)$$

$$A_{21} = A_{22} = -\frac{1}{[T_a]} = \left[ -\frac{1}{T_{a\min}}, -\frac{1}{T_{a\max}} \right];$$

$$M_2 = \left[ \frac{1}{T_{a\max}}, \frac{1}{T_{a\min}} \right];$$

здесь  $[h] = [h_{\min}, h_{\max}]$ ,  $[c] = [c_{\min}, c_{\max}]$ ,  $[J] = [J_{\min}, J_{\max}]$ ,  $[k] = [k_{\min}, k_{\max}]$ ,  $[R] = [R_{\min}, R_{\max}]$ ,  $[T_a] = [T_{a_{\min}}, T_{a_{\max}}]$  – интервалы изменения значений коэффициента вязкого трения, конструктивного коэффициента, момента инерции, коэффициента усиления преобразователя, сопротивления якорной цепи, электромагнитной постоянной времени соответственно.

Переход от уравнений (3) к уравнениям (6) соответствует переходу от точной траектории движения к области, в которой определены возможные траектории движения рассматриваемого объекта управления. Все возможные движения рассматриваемой системы в этой области описываются уравнениями (6), представленными в нормальной форме.

Представим уравнения (6) в канонической форме

$$pY_1 = Y_2; pY_2 = -B_1 Y_1 - B_2 Y_2 + N_2 U, Y_1 = Y_1, \quad (8)$$

где  $B_1, B_2$  – интервалы значений коэффициентов интервального характеристического полинома объекта управления (6)

$$D(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) = 0, \quad (9)$$

где  $\lambda$  – корни характеристического уравнения, которые определяются выражениями

$$B_1 = -A_{11} - A_{22}; B_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}, \quad (10)$$

или с учетом соотношений (7)

$$\begin{aligned} B_1 &= -A_{11} - A_{22} = \\ &= \left[ \frac{J_{\min} k_{\min} U_{y_{\max}} - h_{\max} c_{\max} T_{a_{\max}}}{J_{\min} k_{\min} U_{y_{\max}} T_{a_{\max}}}, \frac{J_{\max} k_{\max} U_{y_{\max}} - h_{\min} c_{\min} T_{a_{\min}}}{J_{\max} k_{\max} U_{y_{\max}} T_{a_{\min}}} \right]; \\ B_2 &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \left[ \frac{k_{\max} U_{y_{\max}} T_{a_{\min}} c_{\min}^2 - h_{\min} c_{\min} R_{\max} T_{a_{\max}}}{J_{\max} k_{\max} U_{y_{\max}} R_{\max} T_{a_{\max}} T_{a_{\min}}}, \right. \\ &\left. \frac{k_{\min} U_{y_{\max}} T_{a_{\max}} c_{\max}^2 - h_{\max} c_{\max} R_{\min} T_{a_{\min}}}{J_{\min} k_{\min} U_{y_{\max}} R_{\min} T_{a_{\min}} T_{a_{\max}}} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Интервальный коэффициент  $N_2$  определяется следующей зависимостью:

$$N_2 = M_2 A_{12} = \left[ \frac{c_{\min}^2}{J_{\max} R_{\max} T_{a_{\max}}}, \frac{c_{\max}^2}{J_{\min} R_{\min} T_{a_{\min}}} \right]. \quad (12)$$

Вводя в соответствии с принципом преобразования обратными связями новое управляющее воздействие

$$\hat{v} = p \hat{Y}_2, \quad (13)$$

представим уравнения движения (8) в форме Бруновского

$$p \hat{Y}_1 = \hat{Y}_2; p \hat{Y}_2 = \hat{v}. \quad (14)$$

Сопоставляя последние уравнения систем (14) и (8), определим взаимосвязь между управляющими воздействиями  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$

$$\hat{U} = K_1 \hat{V} + K_2 \hat{Y}_1 + K_3 \hat{Y}_2, \quad (15)$$

где

$$K_1 = \frac{1}{N_2} = \left[ \frac{J_{\min} R_{\min} T_{\min}}{c_{\max}^2}, \frac{J_{\max} R_{\max} T_{\max}}{c_{\min}^2} \right] = [k_{1\min}, k_{1\max}],$$

$$K_2 = \frac{B_1}{N_2} = \left[ \frac{(J_{\min} k_{\min} U_{\max} - h_{\max} c_{\max} T_{\max}) R_{\min} T_{\min}}{k_{\min} U_{\max} T_{\max} c_{\max}^2}, \frac{(J_{\max} k_{\max} U_{\max} - h_{\min} c_{\min} T_{\min}) R_{\max} T_{\max}}{k_{\max} U_{\max} T_{\min} c_{\min}^2} \right] = [k_{2\min}, k_{2\max}],$$

$$K_3 = \frac{B_2}{N_2} = \left[ \frac{k_{\max} U_{\max} T_{\min} c_{\min} - h_{\min} R_{\max} T_{\max}}{k_{\max} U_{\max} T_{\min} c_{\min}}, \frac{k_{\min} U_{\max} T_{\max} c_{\max} - h_{\max} R_{\min} T_{\min}}{k_{\min} U_{\max} T_{\max} c_{\max}} \right] = [k_{3\min}, k_{3\max}].$$

Управляющее воздействие (15), являясь интервальным, определяет широкий класс алгоритмов управления, формирующих траектории движения электромеханического объекта (3) в области фазового пространства, которая ограничена допустимыми значениями его параметров. Переход к уравнениям (14) путем подачи на вход преобразованного объекта нового управляющего воздействия  $\hat{V}$  позволяет организовать любой желаемый интервал траекторий движения. Причем для формирования этого воздействия могут быть использованы любые методы синтеза линейных замкнутых систем, позволяющие определять алгоритмы управления для объектов с несколькими нулевыми корнями характеристического уравнения. Наиболее удобным в этом случае является использование модального управления [5], которое позволяет определить параметры в общем случае нелинейного регулятора через коэффициенты желаемого характеристического полинома [6]

$$D(\lambda) = C_0 + C_1 \lambda + \lambda^2, \quad (17)$$

где коэффициенты  $C_i$  в общем случае определены в некоторых пределах, т.е.  $C_i = [c_{i\min}, c_{i\max}]$ .

Таким образом, для объекта (14) при условии регулирования координаты  $\hat{Y}_1$  можно записать следующее управляющее воздействие

$$v = F \left( C_0 \left( Y_1 - \hat{Y}_1 \right) - C_1 Y_2, \alpha \right), \quad (18)$$

где  $\hat{Y}_1^*$  – желаемое значение переменной  $\hat{Y}_1$ ,  $F(\cdot)$  – некоторая нечетная активационная функция, которая в открытой области зависит от параметра  $\alpha$

$$F(X, \alpha) = |X|^\alpha \text{sign}(X) \quad (19)$$

и поэтому может рассматриваться как интервальная.

Анализ алгоритма управления (18) показывает, что в отличие от классического модального управления, коэффициенты характеристического полинома (17) используются для формирования линии переключения регулятора, а наличие нелинейной акти-

вационной функции  $f(\cdot)$  существенно расширяет класс синтезируемых управляющих воздействий.

Подстановка найденного алгоритма управления (18) в выражение (15) позволяет определить следующий интервальный алгоритм

$$\hat{U} = K_1 \left| C_0 \left( \hat{Y}_1^* - \hat{Y}_1 \right) - C_1 \hat{Y}_2 \right|^\alpha \operatorname{sign} \left( C_0 \left( \hat{Y}_1^* - \hat{Y}_1 \right) - C_1 \hat{Y}_2 \right) + K_2 \hat{Y}_1 + K_3 \hat{Y}_2. \quad (20)$$

Алгоритм управления (20) позволяет формировать любые траектории движения в заданной области фазового пространства, отличающиеся различными показателями процесса регулирования. Однако с практической точки зрения интерес вызывает движение объекта управления с изменяющимися параметрами по наперед заданной траектории. В этом случае алгоритм управления (20) трансформируем следующим образом

$$\hat{U} = K_1 \left| c_0 \left( \hat{y}_1^* - \hat{y}_1 \right) - c_1 \hat{y}_2 \right|^\alpha \operatorname{sign} \left( c_0 \left( \hat{y}_1^* - \hat{y}_1 \right) - c_1 \hat{y}_2 \right) + K_2 \hat{y}_1 + K_3 \hat{y}_2, \quad (21)$$

где  $c_i$  – коэффициенты характеристического полинома, определяющего желаемую траекторию движения,  $\hat{y}_i$  – компоненты вектора состояния объекта управления,  $\hat{y}_1^*$  – желаемое значение регулируемой координаты. Наличие в алгоритме (21) интервальных коэффициентов  $K_i$  определяет два управляющих воздействия, соответствующих границам интервалов

$$u_{\min} = k_{1\min} \left| c_0 \left( \hat{y}_1^* - \hat{y}_1 \right) - c_1 \hat{y}_2 \right|^\alpha \operatorname{sign} \left( c_0 \left( \hat{y}_1^* - \hat{y}_1 \right) - c_1 \hat{y}_2 \right) + k_{2\min} \hat{y}_1 + k_{3\min} \hat{y}_2 \quad (22)$$

и

$$u_{\max} = k_{1\max} \left| c_0 \left( \hat{y}_1^* - \hat{y}_1 \right) - c_1 \hat{y}_2 \right|^\alpha \operatorname{sign} \left( c_0 \left( \hat{y}_1^* - \hat{y}_1 \right) - c_1 \hat{y}_2 \right) + k_{2\max} \hat{y}_1 + k_{3\max} \hat{y}_2. \quad (23)$$

Поскольку точные значения параметров объекта управления (3) неизвестны, на него должно подаваться управляющее воздействие, ограниченное сверху выражением (22) и снизу – выражением (23). Причем величина этого управляющего воздействия не известна. В этом случае прослеживается аналогия с релейными системами, работающими в скользящем режиме, для которых неизвестна величина подаваемого в каждый момент времени напряжения управления, однако известны пределы его изменения. Эта аналогия позволяет записать следующее управляющее воздействие для интервального объекта (8)

$$\hat{U} = \begin{cases} u_{\min} & \text{при } q < 0; \\ u_{\max} & \text{при } q > 0, \end{cases} \quad (24)$$

где  $q(\cdot)$  – функция переключения, определяемая из условия минимизации интегрального функционала качества вида

$$I = \int_0^\infty \left[ \left( \frac{\hat{V}}{P} - \hat{Y}_2 \right)^2 \right] dt, \quad (25)$$

минимизация которого показывает, что под влиянием управляющего воздействия (15) объект (3) должен двигаться по траекториям, которые описываются выражениями (14), а значит в силу последнего уравнения системы (14) координата  $\hat{Y}_2$  объекта (8) должна совпадать с  $\hat{V} / p$ .

С учетом изложенного выше алгоритм (24) примет следующий вид:

$$\hat{U} = \begin{cases} u_{\min} & \text{при } \frac{\left| c_0 \left( \hat{y}_1^* - \hat{y}_1 \right) - c_1 \hat{y}_2 \right|^\alpha \operatorname{sign} \left( c_0 \left( \hat{y}_1^* - \hat{y}_1 \right) - c_1 \hat{y}_2 \right)}{p} > \hat{y}_2; \\ u_{\max} & \text{при } \frac{\left| c_0 \left( \hat{y}_1^* - \hat{y}_1 \right) - c_1 \hat{y}_2 \right|^\alpha \operatorname{sign} \left( c_0 \left( \hat{y}_1^* - \hat{y}_1 \right) - c_1 \hat{y}_2 \right)}{p} < \hat{y}_2; \end{cases} \quad (26)$$

На рис.1, 2 показаны результаты математического моделирования синтезированной системы управления динамическим объектом (3) с единичными параметрами. Результаты моделирования получены для случая, когда все параметры объекты известны с 50% точностью, т.е.  $a_{ij} = [0.5a_{ij}^{\text{НОМ}}, 1.5a_{ij}^{\text{НОМ}}]$ . Желаемый характеристический полином принят вида

$$D(p) = \lambda^2 + 2\lambda + 1, \quad (27)$$

показатель степени  $\alpha = 0$ .

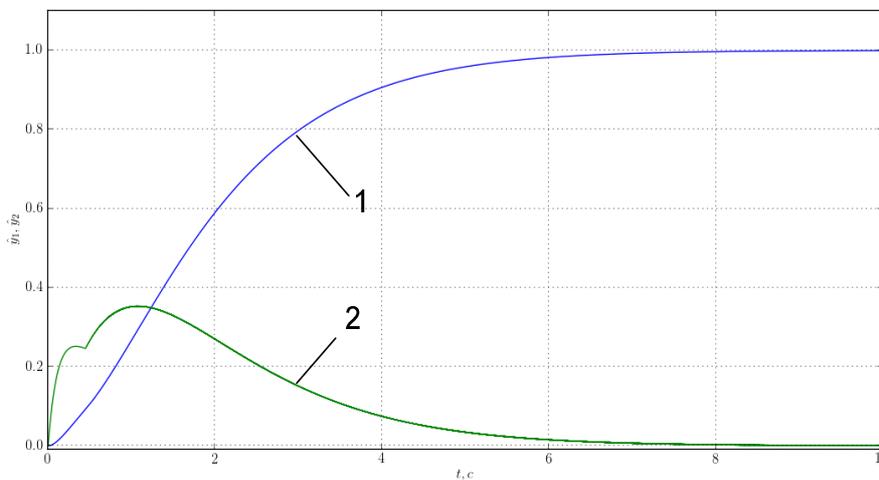


Рисунок 1 – Регулируемая переменная  $\hat{y}_1$  (кривая 1) и ее производная  $\hat{y}_2$  (кривая 2)

Как показывает анализ полученных результатов моделирования, синтезированный алгоритм полностью компенсирует неточное знание параметров объекта управления и их возможные изменения и обеспечивает движение замкнутой системы по асимптотически устойчивым траекториям, которые определяются полином (27).

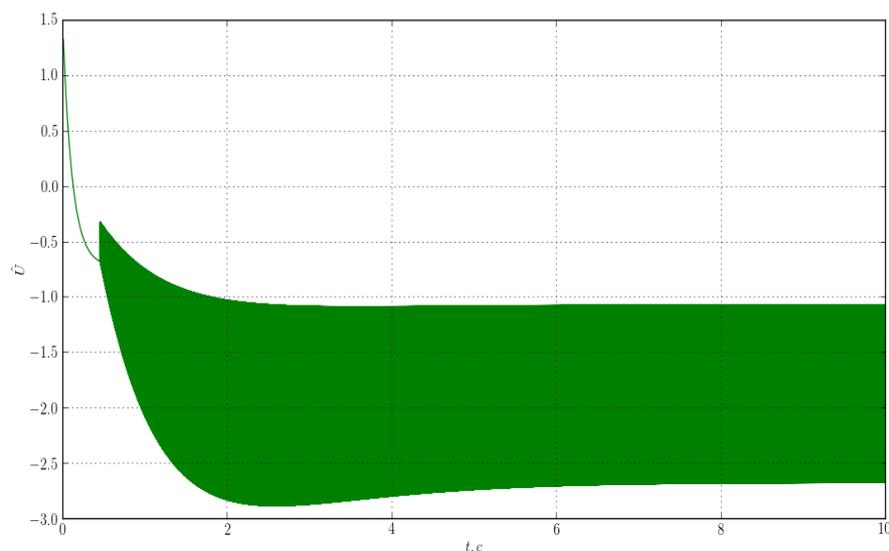


Рисунок 2 – Управляющее воздействие  $\hat{U}$

**Выводы.** Приведенные выше выкладки позволяют сделать ряд выводов и заключений:

1. Использование интервального исчисления на этапе синтеза системы управления позволяет учесть неточности определения и возможные изменения параметров объекта управления за счет организации в системе управления скользящего режима.

2. Переход от уравнений динамики в нормальной форме к уравнениям в форме Бруновского позволяет исключить параметры электромеханического объекта из алгоритма управления и задавать траекторию движения только коэффициентами желаемого характеристического полинома.

3. Синтезированный алгоритм управления можно условно разбить на 2 части, одна из которых обеспечивает движение по заданным траекториям, а вторая совмещает производную регулируемой величины с управляющим воздействием, которое формируется первой составляющей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы [Текст] / И.В.Мирошник. – СПб.: Питер, 2005. – 336с.
2. Jaulin L. Applied interval analysis [Текст] / Luc Jaulin, Michel Kieffer, Oliver Didrit, Eric Walter. – London.: Springer, 2001. – 379p.
3. Fiedler M. Linear optimization problem with inexact data [Текст] / M.Fiedler et all. – New York.: Springer, 2006. – 224p.
4. Садовой А.В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами [Текст] / А.В.Садовой, Б.В.Сухинин, Ю.В.Сохина. – К.:ИСИМО, 1998. – 298с.
5. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы / Ким Д.П. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288с.
6. Волянский Р.С. Синтез оптимальной системы управления с нелинейной активационной функцией [Текст] / Р.С.Волянский, А.В.Садовой // Электротехнические и компьютерные системы. – 2014. – №15 (91). – С.69-71.

Поступила в редколлегию 10.30.2015.