

Але, як впливає з рис.4, появу кожної окремої бульбашки на межі розділу компонентів можна ототожнити з формуванням парового прошарку певного розміру.

Висновки. Отримані в результаті проведення експерименту дані дозволяють детально розглянути процес закипання водної фази емульсії, а також доводять, що формування парового прошарку відбуватиметься на границі двох незмішуваних рідин шляхом коагуляції утворених на даній границі розділу окремих парових бульбашок. Застосування віртуальних осцилографів спільно з комп'ютерним забезпеченням дозволяє скоротити трудомісткість проведення експерименту і, незважаючи на достатню складність його проведення, пов'язану з малими розмірами досліджуваних часток і часовими проміжками виміру, отримати якісну і кількісну характеристики осциляції імпульсів тиску на певній відстані від їх джерела.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гаврилов П.М. Динамика фазового перехода при вскипании сильно перегретой жидкости / Гаврилов П.М. // Теплофизика высоких температур. – 1999. – Т.37. – №4. – С.602-605.
2. Домбровский Л.А. Динамика парового пузыря при тепловом взаимодействии горячей сферической частицы с окружающей водой / Л.А.Домбровский, Л.И.Зайчик // Теплофизика высоких температур. – 2000. – Т.38. – №6. – С.975-984.
3. Рудаков П.О. Обработка сигналов и изображений MathLab 5.X / П.О.Рудаков, И.В.Сафонов. – М.: Диалог – МИФИ, 2000. – 416с.
4. Shima A. Temperature effects on single bubble collapse and induced impulsive pressure / A.Shima, Y.Tomita, T.Ohno // J.Fluid Eng. – 1988. – Vol.110, №2. – P.194-199.
5. Долинский А.А. Теоретическое обоснование принципа ДИВЭ. 2. Исследование поведения ансамбля паровых пузырьков / А.А.Долинский, Г.К.Иваницкий // Промышленная теплотехника. – 1996. – Т.18. – №1. – С.3-20.
6. Климов Р.А. Влияние внутреннего подвода теплоты на процессы вскипания эмульсионных сред / Климов Р.А. // Сборник научных трудов Днепродзержинского государственного технического университета. – Днепродзержинск: ДГТУ. – 2013. – Выпуск 3(23). – С.109-113.

Надійшла до редколегії 08.12.2014.

УДК 539.377

ЧЕРНЫЙ О.А., к.т.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛИТЫ ПРИ СКОРОСТНОМ НАГРЕВЕ

Введение. Технические условия многих отраслей производства нуждаются в интенсификации соответствующих теплотехнологических режимов. Однако, необоснованное повышение рабочих температур и сокращение сроков тепловой обработки объектов могут привести к росту температурных перепадов, что обусловит появление опасных температурных напряжений и других негативных последствий. Именно этим объясняется все возрастающая необходимость оптимального решения противоречий во взаимосвязи энергозатрат с временем нагрева, качеством продукции и ее термостойкостью.

Как известно, поиск температурных режимов скоростного нагрева массивных слитков при разных ограничениях относится к задачам управления системами с рас-

пределенными параметрами, для решения которых обычно привлекается достаточно сложный, неприемлемый для широкого инженерного использования математический аппарат. Между тем, промышленная теплотехника традиционно тяготеет к приближенным аналитическим методам.

К общей теории управления объектами с распределенными параметрами относятся и задачи оптимального (по быстродействию) управления тепловыми процессами (ЗОУТПБ), которые описываются уравнениями теплопроводности с соответствующими краевыми условиями и определенными ограничениями. Достаточно полный обзор трудностей этой проблемы рассмотрен в многочисленных работах (например, [1, 2]).

В конце прошлого века во львовской термомеханической школе зародился оригинальный подход [3, 4] к проблеме оптимизации тепловых режимов, согласно которому ЗОУТПБ решается по новой схеме, предусматривающей осуществление процесса скоростного нагрева по скользящему режиму, что означает поочередное назначение предельно допустимых состояний. Такая постановка ЗОУТПБ позволила получить качественно новое управление – так называемое двухступенчатое вместо известного многоступенчатого релейного управления по методу Беллмана.

Новому методу организации скоростного нагрева было дано [5] название «метод последовательных предельных режимов» (МППР).

При решении ЗОУТПБ по этому подходу в работах [3, 4] использован классический аппарат математической физики, широко употребляемый при решении линейных краевых задач теплопроводности (КЗТ).

Позитивное качество полученных [3, 4] решений заключается в том, что они – точные аналитические. Негатив – избыточная сложность, что значительно затрудняет применение их в практике управления тепловыми режимами. В связи с этим возникла необходимость разработки эффективных приближенных методов решения ЗОУТПБ.

На то время в прикладную теорию теплопроводности широко внедрялась достаточно эффективная модель теплового приграничного (термического) слоя (МТС) [6]. Построенные на этой модели методы (Био Ж.-Б., Вейника А.И., Гольдфарба А.Д., Гудмена Д.У., Канторовича Л.В., Постольника Ю.С., Швеца Д.А. и др.), получив признание и найдя соответствующее практическое воплощение в привычных прямых задачах теплотехники, почти полностью остаются вне поля зрения проблемы оптимального управления тепловыми процессами.

Первым из МТС, примененных к решению ЗОУТПБ, был метод эквивалентных источников (МЭИ) [5]. Уже первые попытки подтвердили ожидаемую эффективность МЭИ в решении не только линейных [7], но и нелинейных [8] ЗОУТПБ.

Постановка задачи. При постановке ЗОУТПБ кроме обязательного ограничения на функцию управления (температуру нагревателя) вводится ограничение еще на тот или иной параметр, по которому и устанавливается режим работы нагревателя. Это ограничение может быть наложено либо на максимальную температуру, либо на максимальный перепад температур, либо на скорость нагрева, либо на максимальные температурные напряжения.

Вполне очевидно, что при ограничениях на напряжение (это фактически будет условие термоупругости) целостность нагреваемого тела будет обеспечена. Возникает полностью логический вопрос: какое термонапряженное состояние будет иметь тело в режимах скоростного нагрева при ограничениях на другие действующие факторы процесса?

Для ответа на этот вопрос в данной работе рассматривается термонапряженное состояние пластины при скоростном конвективном нагреве с ограничением не на напряжение, а на температуру греющей среды $T_c(t)$ и температуру поверхности $T_n(t)$.

Соответствующая ЗОУТПБ исследуется в следующей постановке [7]: определить такую функцию управления $\theta_c(\tau)$, ограниченную предельно допустимым управлением

$$\theta_c(\tau) \leq U(\tau) \leq 1, \quad (1)$$

которая при соблюдении ограничения

$$\theta_{II}(\tau) \leq \vartheta(\tau) < 1 \quad (2)$$

за минимальный отрезок времени τ_* переведет тело из начального температурного состояния

$$\theta(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \theta_0 = 0 \quad (3)$$

в конечное $\theta(\xi, \tau_*)$ с температурой поверхности (цель нагрева)

$$\theta_{II}(\tau_*) = \theta_* < U(\tau_*) \quad (4)$$

и максимальным температурным перепадом (качество нагрева)

$$\theta_{II}(\tau_*) - \theta_{II}(\tau_*) = \Delta\theta_*. \quad (5)$$

При этом функция температуры тела должна удовлетворять дифференциальному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}; \quad \theta(\xi, 0) = \theta_0 = 0 \quad (6)$$

с предельными условиями конвективного теплообмена (КТО)

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = Bi[\theta_c(\tau) - \theta_{II}(\tau)] = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0. \quad (7)$$

Здесь введено в общих чертах принятые безразмерные функции, координаты и критерии

$$\left. \begin{aligned} \theta(\xi, \tau) &= \frac{T(\xi, \tau) - T_0}{T_C^{\max} - T_0}; \quad \theta_c(\tau) = \frac{T_C(\tau) - T_0}{T_C^{\max} - T_0}; \\ \xi &= x/H; \quad \tau = at/H^2; \quad Bi = \alpha_K H/\lambda \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где $T(x, t)$ – температура тела, К; $T_C(t)$ – температура греющей среды, К; T_0 и T_C^{\max} – их начальное и максимальное значение, К; x – координата, м; t – время, ч.; $2H$ – толщина пластины, м; α_K – коэффициент КТО, Вт/(м²К);

Результаты работы. Решение задачи. Принимая МППР в качестве метода-организатора режима управления, а МЭИ – в качестве метода-организатора процесса решения поставленной задачи, получены [7] следующие функции:

1-ая ступень ($0 \leq \tau \leq \tau_1$; $0 \leq \theta_{II}(\tau) \leq \vartheta(\tau)$)

$$\theta_{c1}(\tau) = 1. \quad (9)$$

На стадии прогревания (инерционный этап) ($0 \leq \tau \leq \tau_0 < \tau_1$; $\beta(\tau) \leq \xi \leq 1$)

$$\theta_{II}(\xi, \tau) = \frac{Bi[\xi - \beta(\tau)]^2}{[2 + Bi l(\tau)] l(\tau)}; \quad l(\tau) = 1 - \beta(\tau), \quad (10)$$

где относительная толщина $l(\tau)$ прогретого слоя и длительность инерционного этапа прогревания определяется формулами:

$$l(\tau) = \sqrt{\frac{12(3,25 + Bi)}{6,25 + Bi}} \cdot \tau; \quad \tau_0 = \frac{6,25 + Bi}{12(3,25 + Bi)}. \quad (11)$$

На стадии нагрева (начало упорядоченного этапа) ($\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$; $0 \leq \xi \leq 1$)

$$\theta_{12}(\xi, \tau) = 1 - \left(1 - \frac{Bi}{2 + Bi} \xi^2\right) \exp\left[-\frac{3Bi}{3 + Bi}(\tau - \tau_0)\right]. \quad (12)$$

Заканчивается первый этап в момент τ_1 , когда температура поверхности достигнет величины $\mathcal{G}(\tau_1)$, то есть

$$\theta_{11}(\tau_1) = 1 - \frac{2}{2 + Bi} \exp\left[-\frac{3Bi}{3 + Bi}(\tau_1 - \tau_0)\right] = \mathcal{G}(\tau_1), \quad (13)$$

откуда получаем трансцендентное уравнение относительно τ_1

$$\tau_1 = \tau_0 - \frac{3Bi}{3 + Bi} \ln\left[\left(1 + \frac{Bi}{2}\right)(1 - \mathcal{G}(\tau_1))\right], \quad (14)$$

которое решается при задании конкретной функции $\mathcal{G}(\tau)$. Например, при $\mathcal{G}(\tau) = const < 1$ выражение (14) превращается в обычную формулу.

2-ая ступень ($\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$; $\mathcal{G}(\tau_1) \leq \theta_{211} = \mathcal{G}(\tau) \leq \theta_*$). Решается задача (6), (7)₂ с граничными

$$\theta_{211}(\tau) = \mathcal{G}(\tau) \quad (15)$$

и начальными

$$\theta_2(\xi, \tau_1) = \theta_{12}(\xi, \tau_1) \quad (16)$$

условиями.

С помощью МЭИ получаем следующее решение:

$$\theta_2(\xi, \tau) = \mathcal{G}(\tau) - (1 - \xi^2) \left\{ \frac{Bi[1 - \mathcal{G}(\tau_1)]}{2} + 1,5 \int_{\tau_1}^{\tau} \dot{\mathcal{G}}(\eta) \exp[3(\eta - \tau_1)] d\eta \right\} \exp[-3(\tau - \tau_1)]. \quad (17)$$

Заканчивается вторая ступень в момент τ_2 , когда температура поверхности достигнет нужной величины θ_* (4). Время τ_2 находим из условия

$$\theta_{211}(\tau) = \mathcal{G}(\tau_2) = \theta_*. \quad (18)$$

Функцию управления $\theta_{c2}(\tau)$, обеспечивающую предельное температурное состояние (17) на 2-ой ступени нагрева, определим из предельного условия КТО (7)₁

$$\theta_{c2}(\tau) = \theta_{211}(\tau) + \frac{1}{Bi} \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \mathcal{G}(\tau) + 2\Delta\theta_2(\tau)/Bi, \quad (19)$$

где введен температурный перепад

$$\theta_2(\tau) = \theta_{211}(\tau) - \theta_{212}(\tau) = \left\{ \frac{Bi[1 - \mathcal{G}(\tau_1)]}{2} + 1,5 \int_{\tau_1}^{\tau} \dot{\mathcal{G}}(\eta) \exp[3(\eta - \tau_1)] d\eta \right\} \exp[-3(\tau - \tau_1)]. \quad (20)$$

3-я ступень ($\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3 = \tau_*$; $\Delta\theta_2(\tau_2) \geq \Delta\theta_3(\tau) \geq \Delta\theta_*$). Обеспечиваем необходимый температурный перепад $\Delta\theta_*$ (5) при сбережении условия (18).

Решается КЗТ (6), (7)₂, при

$$\theta_{3II}(\tau) = \theta_* = const \quad (21)$$

с начальным условием

$$\theta_3(\xi, \tau_2) = \theta_2(\xi, \tau_2). \quad (22)$$

Функция температуры тела для этой ступени имеет вид:

$$\theta_3(\xi, \tau_2) = \theta_* - (1 - \xi^2) \Delta\theta_2(\tau_2) \exp[-3(\tau - \tau_2)]. \quad (23)$$

Заканчивается третья ступень по достижению температурным перепадом необходимого значения $\Delta\theta_*$ (5)

$$\Delta\theta_3(\tau_3) = \Delta\theta_2(\tau_2) \exp[-3(\tau_3 - \tau_2)] = \Delta\theta_*. \quad (24)$$

Отсюда находим полное время $\tau_3 = \tau_*$ оптимального (по быстродействию) процесса нагрева пластины:

$$\tau_* = \tau_3 = \tau_2 + \frac{1}{3} \ln \frac{\Delta\theta_2(\tau_2)}{\Delta\theta_*}. \quad (25)$$

Определяем управляющую функцию, обеспечивающую оптимальный режим (23)-(25) на 3-ей ступени:

$$\theta_{C3}(\tau) = \theta_* + \frac{2}{Bi} \Delta\theta_2(\tau_2) \exp[-3(\tau - \tau_2)]. \quad (26)$$

Таким образом, поставленная ЗОУТПБ, которая отвечает ограничениям (1), (2) решена [5, 7]. Для оценки точности полученного решения в работе [7] приведено конкретный числовой пример, взятый из работы [3]:

$$\begin{aligned} U = 1; \quad Bi = 1,5; \quad \vartheta(\tau) = 0,5 + 0,2\tau; \\ \theta_* = 0,8; \quad \Delta\theta_{**} = 0,05 \end{aligned} \quad (27)$$

Графическое сопоставление точного [3] и приближенного [7] решений отображено на рис.1. Сравнение расчетов времени нагрева дало результаты: $\tau_1 = 0,464$ (погрешность $\delta\tau_1 = -0,4\%$); $\tau_2 = 1,5$ ($\delta\tau = 0$); $\tau_3 = \tau_* = 1,775$ ($\delta\tau_3 = -1,1\%$).

Управляющие функции имеют следующие достаточно простые выражения:

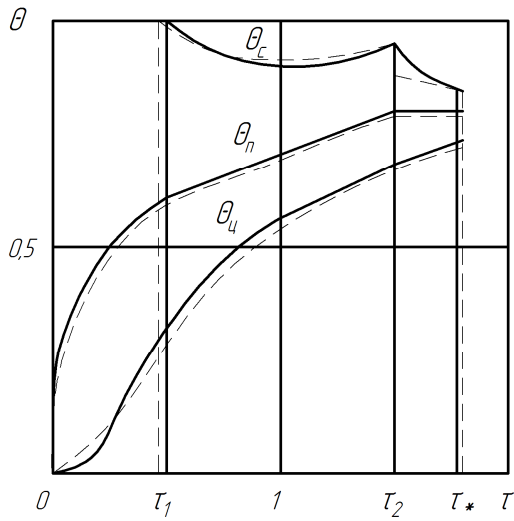
$$\left. \begin{aligned} \theta_{C2}(\tau) &= 0,6333 + 0,2\tau + 1,1007 \exp(-3\tau), & (0,464 \leq \tau \leq 1,5) \\ \theta_{C3}(\tau) &= 0,8 + 0,2\tau + 13,5064 \exp(-3\tau), & (1,5 \leq \tau \leq 1,775) \end{aligned} \right\}. \quad (28)$$

Температурные напряжения. Поле температурных напряжений в симметрично нагреваемой неограниченной плите при упругой деформации описывается известным [9, 10] решением задачи квазистатической термоупругости. В рамках модели термического слоя это решение имеет вид [11]:

на инерционном этапе ($0 \leq \tau \leq \tau_0$)

$$\bar{\sigma}^{(0)}(\tau) = \int_{\beta(\tau)}^1 \theta_1(\xi, \tau) d\xi; \quad 0 \leq \xi \leq \beta(\tau); \quad (29)$$

$$\bar{\sigma}^{(1)}(\xi, \tau) = \int_{\beta(\tau)}^1 \theta_1(\xi, \tau) d\xi - \theta_1(\xi, \tau); \quad \beta(\tau) \leq \xi \leq 1; \quad (30)$$



— — — — — МЕД [7];
 - - - - - точное решение [3]

Рисунок 1 – График оптимального нагрева пластины при ограничениях (1), (2) и данных (27)

на упорядоченном этапе ($\tau \leq \tau_0$)

$$\bar{\sigma}^{(2)}(\xi, \tau) = \int_0^1 \theta_2(\xi, \tau) d\xi - \theta_2(\xi, \tau), \quad (31)$$

где введены безразмерные напряжения:

$$\bar{\sigma} = \sigma / K_\sigma; \quad K_\sigma = \frac{\alpha_T E (T_C^{\max} - T_0)}{1 - \nu}; \quad (32)$$

α_T – коэффициент линейного температурного расширения (КЛТР), 1/К; E – модуль упругости 1-го рода, МПа; ν – коэффициент Пуассона.

Подставляя нагружающие функции $\theta(\xi, \tau)$ (10), (12), (17), (23) в выражения (29)-(31), после очевидных математических операций приходим к обобщенной формуле для напряжений

$$\bar{\sigma}_i(\xi, \tau) = \Delta\theta_i(\tau) F_i(\xi, \tau), \quad (33)$$

где температурный перепад $\Delta\theta_i(\tau)$ и функция распределения $F_i(\xi, \tau)$ для соответствующих

ступеней нагрева следующие:

на первой ступени ($0 \leq \tau \leq \tau_1$): инерционный этап

$$\Delta\theta_1(\tau) = Bi l(\tau) / [2 + Bi l(\tau)]; \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0 \leq \tau_1; \quad (34)$$

$$F_1(\xi, \tau) = \begin{cases} l(\tau)/3 & - 0 \leq \xi \leq \beta(\tau); \\ l(\tau)/3 - [\xi - \beta(\tau)]^2 / l^2(\tau); & - \beta(\tau) \leq \xi \leq 1; \end{cases} \quad (35)$$

упорядоченный этап ($\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$)

$$\Delta\theta_{1,2}(\tau) = \frac{Bi}{2 + Bi} \exp\left[-\frac{3Bi}{3 + Bi}(\tau - \tau_0)\right]; \quad (36)$$

$$F_2(\xi, \tau) = (1 - 3 \cdot \xi^2) / 3; \quad (37)$$

на второй ступени ($\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$) $\Delta\theta_2(\tau)$ (20); $F_2(\xi, \tau)$ (37);

на третьей ступени ($\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3 = \tau_*$) $F_3(\xi, \tau) = F_2(\xi, \tau)$ (37);

$$\Delta\theta_3(\tau) = \Delta\theta_2(\tau_2) \exp[-3(\tau - \tau_2)]. \quad (38)$$

Для иллюстрации рассмотрим конкретный пример с исходными данными (27) (рис.2, 3):

$$E = 1,6 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \alpha_T = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}; \quad T_C^{\max} = 1273 \text{ К}; \quad T_0 = 273 \text{ К}; \quad \nu = 0,3. \quad (39)$$

$$K_{\sigma} = \frac{\alpha_T E \Delta T}{1 - \nu} = \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 1,6 \cdot 10^5 \cdot 1000}{0,7} = 2740 \text{ МПа};$$

$$[\sigma] = 0,30 \cdot K_{\sigma} = 0,30 \cdot 2740 = 900 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\max,t} = 0,143 \cdot 2740 = 392 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max,C} = 0,286 \cdot 2740 = 784 \text{ МПа}.$$

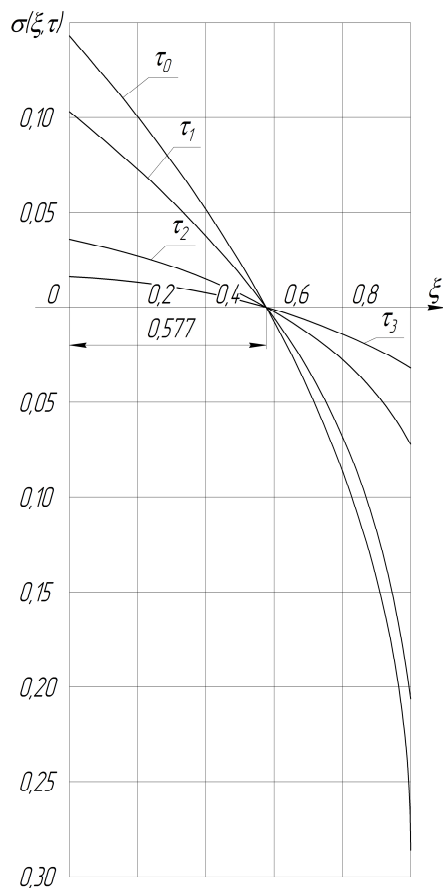


Рисунок 2 – График поля термических напряжений, построенный по исходным данным (27)

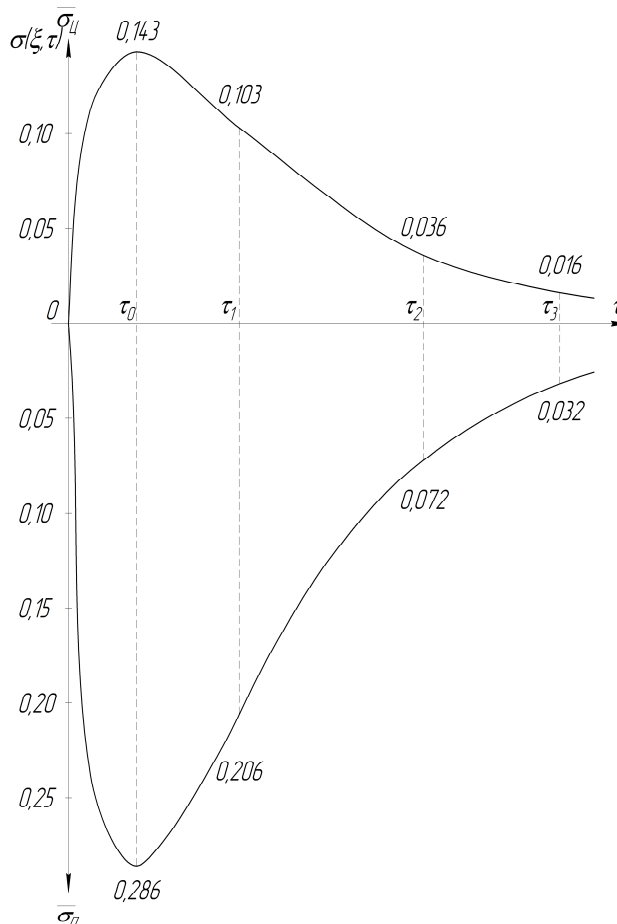


Рисунок 3 – График изменения экстремальных температурных напряжений во времени, построенный по исходным данным (27)

Выводы. Из полученных результатов следует, что при скоростном нагреве с ограничением на определенные характеристики теплового процесса нужно иметь в виду возможность возникновения температурных напряжений, превышающих границу прочности данного материала. В таком случае необходимо вводить соответствующие коррективы в исходные данные процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Ю.Н. Оптимальное проектирование тепловых агрегатов / Ю.Н.Андреев. – М.: Машиностроение, 1983. – 231с.
2. Бутковский А.Г., Управление нагревом металла / Бутковский А.Г., Малый С.А. – М.: Металлургия, 1981. – 272с.
3. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами/ Вигак В.М. – К.: Наук. думка, 1979. – 360с.
4. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями / Вигак В.М. – К.: Наук. думка, 1988. – 312с.

5. Постольник Ю.С. Возможности МЭИ в решении ЗОУТПБ / Ю.С.Постольник // Обратные задачи и идентификация процессов теплообмена: Всесоюзн. семинар, материалы. – М., 1987. – С.204-205.
6. Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности / Лыков А.В. // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1971. – № 5. – С.109-150.
7. Постольник Ю.С. Применение МЭИ к решению ЗОУТП по быстрдействию нагрева пластины при ограничениях на максимальную температуру. / Постольник Ю.С., Машенко О.И. // Наука – производству: сб. науч. ст. ДИИ. – К.: Вища школа, 1991. – С.188-191.
8. Постольник Ю.С., Оптимальный по быстрдействию режим нагрева пластины с функционально зависящими характеристиками при ограничениях на функцию управления и распределения. / Постольник Ю.С., Машенко О.И. // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1994. – №2. – С.52-56.
9. Боли Б. Теория температурных напряжений. / Боли Б., Уэйнер Дж. – М.: Мир, 1964. – 517с.
10. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. / Коваленко А.Д. – К.: Вища школа, 1970. – 307с.
11. Постольник Ю.С. Приближенные методы исследований в термомеханике / Постольник Ю.С. – К.: Вища школа, 1984. – 158с.

Поступила в редколлегию 01.12.2014.

УДК 536.2

ГОРБУНОВ А.Д., д.т.н., профессор
УКЛЕИНА С.В., аспирант
ТРИКИЛО А.И., к.т.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

РАСЧЕТ ВРЕМЕНИ ИНЕРЦИОННОГО ПЕРИОДА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ III РОДА

Введение. К настоящему времени существует достаточно много точных [1] и приближенных методик [2-4] расчета процессов нагрева (охлаждения) тел на начальной стадии, однако, например, в [1, 2] отсутствуют формулы по определению времени инерционного периода, а в [3, 4] – по расчету среднemasсовых температур, без знания которых невозможно определить термические напряжения.

Получим решения, свободные от указанных недостатков. Аналогичные решения были выведены ранее при решении задач для граничных условий I [5]. и II рода [6].

Постановка задачи. Математическая постановка задачи симметричного нагрева (охлаждения) тел простой геометрической формы от начальной температуры T_0 до температуры среды T_c имеет вид (рис.1):

$$\frac{\partial \vartheta(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \frac{\partial \vartheta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\vartheta(X, 0) = \vartheta_0 = 1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vartheta(0, Fo)}{\partial X} = 0, \quad (3)$$