

5. Постольник Ю.С. Возможности МЭИ в решении ЗОУТПБ / Ю.С.Постольник // Обратные задачи и идентификация процессов теплообмена: Всесоюзн. семинар, материалы. – М., 1987. – С.204-205.
6. Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности / Лыков А.В. // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1971. – № 5. – С.109-150.
7. Постольник Ю.С. Применение МЭИ к решению ЗОУТП по быстрдействию нагрева пластины при ограничениях на максимальную температуру. / Постольник Ю.С., Машенко О.И. // Наука – производству: сб. науч. ст. ДИИ. – К.: Вища школа, 1991. – С.188-191.
8. Постольник Ю.С., Оптимальный по быстрдействию режим нагрева пластины с функционально зависящими характеристиками при ограничениях на функцию управления и распределения. / Постольник Ю.С., Машенко О.И. // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1994. – №2. – С.52-56.
9. Боли Б. Теория температурных напряжений. / Боли Б., Уэйнер Дж. – М.: Мир, 1964. – 517с.
10. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. / Коваленко А.Д. – К.: Вища школа, 1970. – 307с.
11. Постольник Ю.С. Приближенные методы исследований в термомеханике / Постольник Ю.С. – К.: Вища школа, 1984. – 158с.

Поступила в редколлегию 01.12.2014.

УДК 536.2

ГОРБУНОВ А.Д., д.т.н., профессор
УКЛЕИНА С.В., аспирант
ТРИКИЛО А.И., к.т.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

РАСЧЕТ ВРЕМЕНИ ИНЕРЦИОННОГО ПЕРИОДА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ III РОДА

Введение. К настоящему времени существует достаточно много точных [1] и приближенных методик [2-4] расчета процессов нагрева (охлаждения) тел на начальной стадии, однако, например, в [1, 2] отсутствуют формулы по определению времени инерционного периода, а в [3, 4] – по расчету среднemasсовых температур, без знания которых невозможно определить термические напряжения.

Получим решения, свободные от указанных недостатков. Аналогичные решения были выведены ранее при решении задач для граничных условий I [5]. и II рода [6].

Постановка задачи. Математическая постановка задачи симметричного нагрева (охлаждения) тел простой геометрической формы от начальной температуры T_0 до температуры среды T_c имеет вид (рис.1):

$$\frac{\partial \vartheta(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \frac{\partial \vartheta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\vartheta(X, 0) = \vartheta_0 = 1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vartheta(0, Fo)}{\partial X} = 0, \quad (3)$$

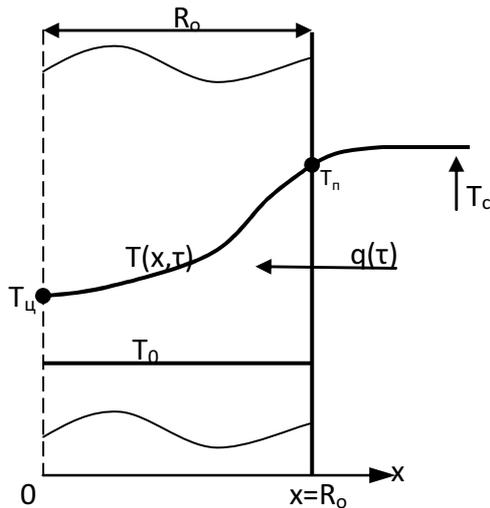


Рисунок 1 – К постановке задачи теплопроводности

можно считать полубесконечным плоским телом. Перенесем начало координат на поверхность (рис.2) и введем известное [3] понятие о толщине термического (прогретого) слоя переменной толщины $\delta(\tau)$. Считается, что при $x \geq \delta(\tau)$ температура в этих точках

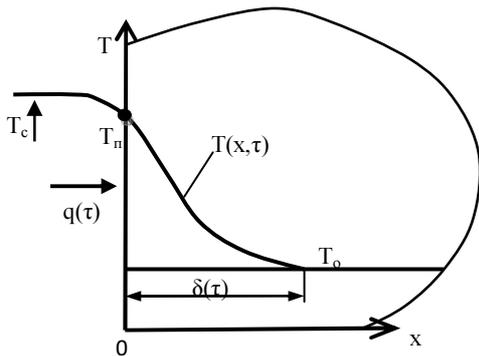


Рисунок 2 – Схема начальной стадии нагрева

отличается не более, чем на $\varepsilon_{\text{п}} = 5\%$ от первоначальной T_0 , где $\varepsilon_{\text{п}}$ можно трактовать как степень прогрева центра тела.

Чаще всего, для большинства задач реализуется так называемый «корневой» закон изменения термического слоя во времени $\delta(\tau) = 2u_0 \sqrt{a\tau}$ или в безразмерном виде:

$$S(\text{Fo}) = \frac{\delta(\tau)}{R_0} = 2u_0 \sqrt{\text{Fo}}, \quad (5)$$

где a – коэффициент температуропроводности, $\text{м}^2/\text{с}$, u_0 – постоянная величина, существенно зависящая от геометрии тела и вида граничного условия (4).

Результаты работы. Решение задачи.

1. Приближенный метод Ю.С.Постольника.

Согласно [3] уравнение для расчета толщины термического слоя $S = S(\text{Fo})$ имеет вид:

$$12 \cdot k \cdot \text{Fo} = f(S), \quad (6)$$

где

$$f(S) = S^2 + \frac{4S}{\text{Bi}(\text{Fo})} - \frac{8}{\text{Bi}^2(\text{Fo})} \ln \left(1 + \frac{S \cdot \text{Bi}(\text{Fo})}{2} \right). \quad (7)$$

Время инерционного периода Fo_1 находится из условия достижения теплового возмущения центральных точек тела, т.е. из условия $\delta(\tau_1) = R_0$ или $S(\text{Fo}_1) = 1$. Тогда из (6) следует

$$\text{Fo}_1 = \frac{f(1)}{12k}. \quad (8)$$

$$-\frac{\partial \vartheta(1, \text{Fo})}{\partial X} = \text{Bi} \cdot \vartheta_n(\text{Fo}), \quad (4)$$

где $\vartheta = (T(x, \tau) - T_c) / \Delta T_0$;

$\Delta T_0 = (T_0 - T_c)$ – максимально возможный перепад температур, $^{\circ}\text{C}$; $\vartheta_n(\text{Fo}) = \vartheta(1, \text{Fo})$ – относительная температура на поверхности; $X = x/R_0$; R_0 – характерный размер тела, м; $\text{Fo} = a\tau/R_0^2$ – число Фурье; $\text{Bi} = \alpha R_0/\lambda$ – число Био; k – фактор геометрической формы, равный 1, 2, 3 соответственно для пластины, цилиндра и шара.

При рассмотрении инерционной, начальной стадии (НС), когда процессу нагрева (охлаждения) подвержены только тонкие поверхностные слои массивного тела, последнее

При $Bi = \infty$ из (6) получим уравнение (5), в котором $u_0 = \sqrt{3k}$.

2. Графически точные решения А.В.Лькова.

Время инерционного периода Fo_1 найдено с помощью графиков [1] из условия достижения при соответствующих числах Био значений температур в центре тела $\vartheta_{ц} = (Fo_1) = 0,95$.

3. Предлагаемая методика.

Решая систему уравнений (1)-(4) методом разделения переменных, в [7] получено: температура в любой точке тела

$$\vartheta(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cdot U_n(X) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (9)$$

в центре при $X = 0$

$$\vartheta_{ц}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo}, \quad (10)$$

на поверхности при $X = 1$

$$\vartheta_{п}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo} \quad (11)$$

и среднemasсовая

$$\vartheta_{ср}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo}, \quad (12)$$

где $P_n = \frac{2Bi}{Bi(Bi+2-k) + \mu_n^2}$; $B_n = P_n \cdot \frac{kBi}{\mu_n^2}$; $A_n = P_n \cdot H_k$ – тепловые амплитуды; координатная функция $U_n(X) = \frac{\cos(\mu_n X)}{\cos \mu_n}$ – для пластины, $\frac{J_0(\mu_n X)}{J_0(\mu_n)}$ – цилиндра и $\frac{\sin(\mu_n X)}{(\mu_n X)} \cdot \frac{\mu_n}{\sin \mu_n}$ – для шара; $H_k = U_n(0)$; $k = 1, 2, 3$; J_0, J_1 – функции Бесселя первого

рода; μ_n – корни соответствующего характеристического уравнения, например, для пластины

$$\operatorname{ctg} \mu_n = \mu_n / Bi. \quad (13)$$

Иногда необходимо знать температурную разность:

$$\Delta \vartheta(Fo) = \vartheta_{п}(Fo) - \vartheta_{ц}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo}, \quad (14)$$

где $E_n = P_n - A_n \equiv P_n(1 - H_k)$.

Условно можно считать, что инерционный период нагрева закончится в момент времени Fo_1 , когда заданная температура в центре станет равной $\vartheta_{ц,3} = (1 - \varepsilon_n) = 0,95$ и свидетельствующей о том, что уже все тело начинает прогреваться.

Полагая в уравнении (10) $\vartheta_{ц}(Fo_1) = \vartheta_{ц,3}$ и используя два члена ряда, получим время инерционного периода:

$$Fo_1 = \frac{1}{\mu_1^2} \ln \frac{A_1 \cdot (1 - \varepsilon_1(Fo_1))}{\vartheta_{ц,3}}, \quad (15)$$

где $\varepsilon_1(\text{Fo}_1) = (|A_2|/A_1) \cdot \exp(-a \cdot \text{Fo}_1)$; $a = \mu_2^2 - \mu_1^2$.

Ввиду зависимости $\varepsilon_1(\text{Fo}_1)$, уравнение (15) должно решаться методом последовательных приближений. Использование этого метода для пластины при $\text{Bi} = \infty$ на шестой итерации привело к точному значению $\text{Fo}_1 = 0,099$, однако для шара этот метод оказался расходящимся. В этом случае следует применить другой, более мощный метод решения трансцендентного уравнения, например, метод касательных Ньютона.

Итерационная формула Ньютона для уравнения (15) имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k), \tag{16}$$

где $f(x_k) = \mathcal{G}_{\text{ц.з.}} - \sum_n A_n \exp(-\mu_n^2 \cdot x_k)$; $f'(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 A_n \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot x_k)$.

За нулевое приближение x_0 логично принять Fo_1 , рассчитанное по формуле (15) при $\varepsilon_1 = 0$. Расчет по уравнению (16) можно прекратить при выполнении условия $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$, где ε – малое число, например, $\varepsilon = 0,0001$.

Численный пример. Пусть требуется для шара ($k = 3$) найти время инерционного периода при $\text{Bi} = \infty$. Из табл.1 для шара выбираем $a_1 = \pi$; $a_2 = 2\pi$; $A_1 = 2$; $A_2 = -2$. Нулевое приближение по уравнению (15) при $\varepsilon_1 = 0$: $x_0 = (1/\pi^2) \ln(2/0,95) = 0,07543$.

Таблица 1 – Значения a_n , $U_n(X)$, $A_{n,\infty}$ и $B_{n,\infty}$ при $\text{Bi} = \infty$ в зависимости от формы тела

Форма тела	Уравнение корней	Корни a_n	$U_n(X)$	$A_{n,\infty}$	$B_{n,\infty}$
$k = 1$	$\cos(a_n) = 0$	$(2n-1) \cdot \pi/2$	$\cos(a_n X)$	$\frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{a_n}$	$\frac{2}{a_n^2}$
$k = 2$	$J_0(a_n) = 0$	2,4048 и т.д.	$J_0(a_n X)$	$\frac{2}{a_n J_1(a_n)}$	$\frac{4}{a_n^2}$
$k = 3$	$\sin(a_n) = 0$	$n\pi, n = 1, 2, \dots$	$\frac{\sin(a_n X)}{(a_n X)}$	$(-1)^{n+1} \cdot 2$	$\frac{6}{a_n^2}$

Расчет по уравнению (16) ведем с учетом двух членов ряда:

$$f(x_0) = 0,95 - \left(2 \cdot e^{-\pi^2 \cdot x_0} - 2 \cdot e^{-4 \cdot \pi^2 \cdot x_0} \right) = 0,1018;$$

$$f'(x_0) = \pi^2 \cdot 2 \cdot e^{-\pi^2 \cdot x_0} - 4 \cdot \pi^2 \cdot 2 \cdot e^{-4 \cdot \pi^2 \cdot x_0} = 5,5369.$$

Первое приближение $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 0,0754 - \frac{0,1018}{5,5357} = 0,0564$.

Второе приближение по формуле (16) $x_2 = 0,0548$ практически совпало с точным значением $\text{Fo}_1 = 0,0547$ (табл.4.6 [1]), когда $\mathcal{G}_{\text{ц.з.}}(\text{Fo}_1) = 0,95$.

При известном времени Fo_1 постоянная

$$u_0 = 1/(2/\sqrt{\text{Fo}_1}). \tag{17}$$

Наибольшую и основную трудность при практических расчетах по уравнениям (9)-(16) представляет определение бесчисленного множества корней μ_n характеристического уравнения (13) и др. В работе [7] предложена общая для всех трех тел формула при $Bi < 10$

$$\mu_1 = \sqrt{D/\gamma} \quad (18)$$

и когда $Bi \geq 10$:

$$\mu_n = a_n(1 - \beta), \quad (19)$$

где $D = k \cdot Bi / m$; $m = (1 + gBi)$ – коэффициент термической массивности тела (КТМТ); $\gamma = (1 + \sqrt{1 + 4\rho})/2$; a_n – корни (13) при $Bi = \infty$; $\rho = D^2 / [k(k+2)^2(k+4)]$; $\beta = 1 / Bi$; $g = 1 / (k + 2)$.

При исследовании задач конвективного нагрева рассматривают два предельных случая, когда расчетные соотношения могут значительно упроститься. Это нагрев термически тонких тел (ТТТ), когда $Bi < 1$, и термически массивных тел (ТМТ), когда $Bi > 10$.

Асимптотика при малых числах Био. Первая амплитуда, входящая в уравнение (10), согласно [7] примерно равна $A_1 \approx 1 + K_A \cdot Bi$, где $K_A = gk/2$. Тогда уравнение (15) с учетом разложения логарифмической функции ($\ln(1 + x) \approx x$) станет

$$Fo_1 = \gamma(K_A \cdot Bi + \varepsilon_n) / D \quad (20)$$

или при очень малых числах Био

$$Fo_1 = m\varepsilon_n / (kBi). \quad (21)$$

Асимптотика при больших числах Био. Первая амплитуда согласно [7]

$$A_n \approx A_{n,\infty} \cdot \sqrt{1 - z^2}, \quad (22)$$

где $z = \mu_n / Bi = a_n(1 - \beta) \cdot \beta$. Амплитуды $A_{n,\infty}$, $B_{n,\infty}$ и a_n – корни уравнения (13) и других при числах $Bi = \infty$ приведены в табл.1.

Используя инженерную методику [7] расчета корней, время инерционного периода при $Bi = \infty$ можно записать в приближенном, но удобном для расчетов обобщенном виде:

$$Fo_1 = \frac{\gamma_\infty}{D_\infty} \cdot \ln \frac{A_\infty}{0,95}, \quad (23)$$

где $A_\infty \approx 0,4(k+2)$; $D_\infty = k(k+2)$; $\gamma_\infty = (1 + \sqrt{1 + 4\rho_\infty})/2$; $\rho_\infty = k/(k+4)$ – величины, входящие в уравнение (18) при $Bi = \infty$. Для пластины расчет по (23) дал $Fo_1 = 0,0912$. Это примерно равно точному $Fo_1 = 0,099$ и $Fo_1 = 0,1187$ в случае его определения по формуле (15) при $\varepsilon_1 = 0$.

Из зависимостей (15), (20) и (23) по расчету времени инерционного периода наиболее достоверной можно считать (15) с использованием табулированных в [1] точных значений корней $\mu_n = f(Bi)$ и $A_n(Bi)$ или рассчитанных на ПВМ.

Для анализа результатов в табл.2 приведены: графически точные данные [1], рассчитанные по формуле (15) при $\varepsilon_1 = 0$ и по уравнению (8). На рис.3 представлена зависимость (15) времени инерционного периода от числа Био и формы тела, полученная с помощью OriginPro 8.5.1.

Анализ данных табл.2 показал, что разработанная аналитическая методика расчета времени инерционного периода достаточно проста и имеет приемлемую для инженерных расчетов точность.

Таблица 2 – Зависимость времени Fo_1 от числа Био и формы тела

Форма тела	Источник	Число Bi				
		0,1	1	10	100	∞
Пластина $k=1$	Точное по [1]	0,68	0,20	0,11	-	0,099
	По уравнению (15)	0,6939	0,2242	0,1392	0,1209	0,1187
	По уравнению (8)	0,1640	0,1464	0,1047	0,0864	0,083
Цилиндр $k=2$	Точное по [1]	0,38	0,12	0,08	-	0,068
	По уравнению (15)	0,3870	0,1519	0,1054	0,0921	0,0904
	По уравнению (8)	0,0819	0,0732	0,0523	0,0432	0,0417
Шар $k=3$	Точное по [1]	0,26	0,099	0,061	-	0,055
	По уравнению (15)	0,2739	0,1187	0,0878	0,0769	0,0754
	По уравнению (8)	0,055	0,0488	0,0349	0,0288	0,0278

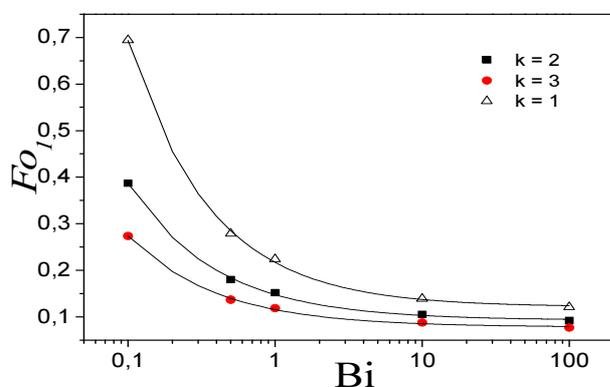


Рисунок 3 – Зависимость времени инерционного периода от числа Био и формы тела

Тогда расчет по (15) дает $Fo_1=0,139$ (табл.2), для ГУ II рода согласно [5] $Fo_1 = g/2 = 1/6$ и по уравнению (23) при $Bi = \infty$ $Fo_1 = 0,0912$. Окончательно $0,0912 < 0,139 < 0,167$, что и требовалось доказать. Среднее значение дает $Fo_1 = (0,091 + 0,167)/2 = 0,13$.

Анализируя уравнение (14), наблюдаем, что с ростом времени температурная разность вначале возрастает, достигает максимального значения $\Delta\theta_{max}$ при числах Фурье $Fo_{M,2} = 0,03...0,30$, а затем постепенно падает, приближаясь к нулю по экспоненте. Это время наступления максимальной разности температур логично считать временем инерционного периода $Fo_1 = Fo_{M,2}$.

Выведем приближенную аналитическую формулу для расчета $Fo_{M,2}$. Дифференцируя уравнение (14) по времени, приравнявая производную нулю и используя два члена в сумме ряда, получим:

$$Fo_{M,2} = (1/a) \ln(1/e_2), \tag{25}$$

где $a = \mu_2^2 - \mu_1^2$; $\delta = (\mu_1/\mu_2)^2$; $e_2 = \delta \cdot E_1/E_2$.

В двух предельных случаях уравнение (25) значительно упрощается.

Так, согласно [7] при малых числах Био ($Bi < 1$)

В заключение следует отметить, что в реальных сложных условиях постоянная U_0 находится между двумя характерными режимами $T_n = \text{const}$ (ГУ I рода) и $q_n = \text{const}$ (ГУ II рода), т.е. $U_0^{\text{II}} \leq U_0 \leq U_0^{\text{I}}$ или относительно времени инерционного периода

$$Fo_1^{\text{I}} \leq Fo_1 \leq Fo_1^{\text{II}}. \tag{24}$$

Доказательство неравенства (24).

Пусть для пластины ($k=1$) $Bi=10$.

$$Fo_{M.2} = \frac{1}{5(1+k)} \ln \frac{7+k}{Bi}, \quad (26)$$

а при больших ($Bi \gg 1$)

$$Fo_{M.2} = 0,056 / (1 - \beta)^2. \quad (27)$$

На рис.4 представлена зависимость максимального времени $Fo_{M.2}$ от числа Био и формы тела, рассчитанная по уравнению (25).

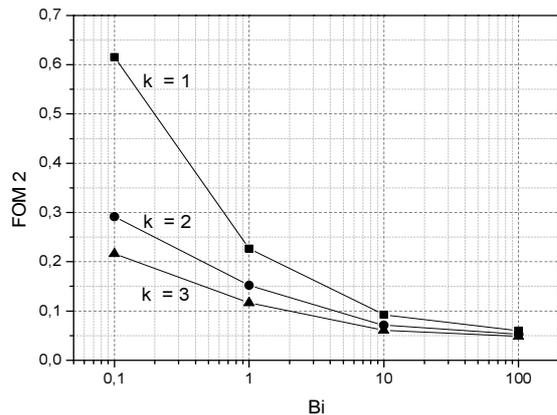


Рисунок 4 – Зависимость времени $Fo_{M.2}$ от числа Био и формы тела

Из анализа рис.3 и 4 следует, что время наступления $Fo_{M.2}$ максимума температурной разности практически совпадает со временем инерционной стадии Fo_1 , оставаясь чуть ниже его.

Расчетные формулы, работающие на начальной стадии при $Fo < 0,1$ приведены в работе [4].

Выводы.

1. Разработана инженерная методика аналитического расчета времени инерционного периода в линейных задачах нагрева (охлаждения) тел правильной геометрической формы при граничных условиях III рода.

2. Показано, что время прогрева в реальных сложных условиях находится между двумя характерными режимами нагрева: постоянным тепловым потоком и неизменной температурой среды.

3. Предложено в качестве времени инерционного периода также считать время наступления максимума разности температур между поверхностью и центром тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности / Лыков А.В. – М.: Высшая школа, 1967. – 600с.
2. Гольдфарб Э.М. Теплотехника металлургических процессов / Гольдфарб Э.М. – М.: Металлургия, 1967. – 439с.
3. Постольник Ю.С. Приближенные методы исследования в термомеханике / Постольник Ю.С. – К.-Донецк: Высшая школа, 1984. – 158с.
4. Горбунов А.Д. Аналитический расчет процессов нагрева тел на начальной стадии / Горбунов А.Д., Уклеина С.В. // Математическое моделирование. – Днепропетровск: ДГТУ. – 2008. – № 1 (18). – С.29-33.
5. Горбунов А.Д. Аналитический расчет температур и термических напряжений при граничных условиях I рода / Горбунов А.Д., Уклеина С.В. // Математическое моделирование. – Днепропетровск: ДГТУ. – 2014. – № 2 (31). – С.8-13.
6. Горбунов А.Д. Аналитический расчет температур и термических напряжений при граничных условиях II рода / Горбунов А.Д., Трикило А.И., Уклеина С.В. // Металлургическая теплотехника: сборник научных трудов НМетАУ. – Днепропетровск: Новая идеология. – 2015. – Вып.6 (21). – С.18-27.
7. Горбунов А.Д. К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы / Горбунов А.Д. // Математическое моделирование. – Днепропетровск: ДГТУ. – 2012. – № 1(26). – С.39-45.

Поступила в редколлегию 03.03.2015.