

Розподіл по товщині циліндра температури T показано на рис.2, а, з якого видно, що розподіли температури T співпадають для циліндра і коробчастої конструкції. На рис.2, б, в, г показано розподіли компонент напружень й інтенсивності пластичної деформації. В перетині $x = 0$ напрямки напружень σ_{xx} і $\sigma_{\varphi\varphi}$ співпадають.

Висновки. З отриманих результатів видно, що в перетинах, які відповідають серединам стінок коробки, добре узгоджуються напруження, які в коробці й циліндрі співпадають за напрямками. Це дає можливість зробити висновок, що розробку й тестування методик розв'язання задач термопластичності можна проводити в осесиметричній постановці, а потім перенести її на пластинчасті конструкції.

ЛІТЕРАТУРА

1. Galishin A.Z. Thermal Stress-Strain State of Thin Laminated Shells of Revolution under Convective Heat Exchange with the Environment / Galishin A.Z., Steblyanko P.A., Shevchenko Yu.N. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету: (технічні науки): тематичний випуск “Математичні проблеми технічної механіки / Дніпродзержинськ: ДДГУ. – 2013. – Випуск 2 (22). – С.3-8.
2. Басов К.А. ANSYS для конструкторов / Басов К.А. – М.: ДМК Пресс, 2009. – 248с.
3. Шевченко Ю.Н. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. – К.: Наук. думка, 1992. – 328с.

Надійшла до редколегії 20.05.2015.

УДК 539.3

БАГНО О.М., д.фіз.-мат.н., пров. наук. співр.

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ НА ДИСПЕРСІЮ НОРМАЛЬНИХ ХВИЛЬ У СИСТЕМІ: ШАР ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ – СТИСЛИВИЙ ПРУЖНИЙ ШАР

Вступ. Хвилі, що поширюються вздовж границі контакту пружного шару та шару рідини, належать до числа узагальнень ґрунтовно досліджених основних типів акустичних хвиль: Релея, Лява, Стоунлі та Лемба. Огляд робіт і аналіз результатів, отриманих у рамках класичної теорії пружності, наведено в [1]. Серед багатьох публікацій, що вийшли останнім часом, відмітимо лише статтю [2]. Вона присвячена дослідженню у рамках класичної теорії пружності локалізації поверхневих хвиль у системі: пружний шар на рідкому напівпросторі. У роботі приділена увага вивченню властивостей нижчих нормальних хвиль, що поширюються у гідропружному хвелеводі. При цьому детально проаналізовано поведінку хвиль Релея, Стоунлі та трьох вищих мод у високочастотній частині спектра. Чисельно визначені величини фазових швидкостей поверхневих хвиль і трьох перших мод високого порядку при великих значеннях хвильового числа. Показано, що ефекти пружно-рідинної взаємодії суттєво залежать від механічних властивостей рідини та пружного матеріалу.

Разом з тим, значне практичне використання поверхневих хвиль вимагає врахування властивостей, які притаманні реальним тілам. До числа таких факторів належать початкові напруження. Задачі, які розглянуто, та результати, що отримані з урахуванням у тілах початкових напружень, наведено в [3]. Дане повідомлення присвячене дослідженню у рамках тривимірних рівнянь лінеаризованої теорії пружності при скінчених деформаціях впливу початкових напружень на швидкості нормальних хвиль Лемба у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, що взаємодіє з шаром ідеальної стислової рідини.

Постановка задачі. Будемо розглядати такі динамічні процеси у гідропружній системі, при яких додаткові деформації, тобто збурення деформацій, що виникають, значно менше початкових. Досліджуються гармонічні хвильові процеси малої амплітуди в пружних тілах, які знаходяться в початковому стані.

Далі припустимо, що нелінійно-пружне тверде тіло, пружний потенціал якого є довільною двічі неперервно-диференційованою функцією компонент тензора деформацій Гріна, заповнює об'єм: $-\infty < z_1 < \infty$, $-h_2 \leq z_2 \leq 0$, $-\infty < z_3 < \infty$ та контактує з шаром ідеальної стисливої рідини, що займає об'єм: $-\infty < z_1 < \infty$, $0 \leq z_2 \leq h_1$, $-\infty < z_3 < \infty$. Будемо вважати, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно вздовж осі $0z_3$. У цьому випадку у всіх площинах, паралельних площині $0z_1z_2$, явища будуть відбуватися тотожним чином. Тому задача буде плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль у площині $0z_1z_2$.

Скористаємося постановками задач гідропружності для тіл з початковими напруженнями та представленнями загальних розв'язків, запропонованими в роботах [4-6]. У подальшому досліджуються хвильові процеси у попередньо деформованих стисливих пружних тілах, початковий стан яких є однорідним.

Для плоского випадку, який розглядається, загальні розв'язки будуть мати вигляд [4-6]:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1; v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t}, \quad (1)$$

де введені функції χ_1 та χ_2 задовольняють рівнянням:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)(\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0; \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0. \quad (3)$$

Дана задача характеризується наступними динамічними

$$Q_1|_{z_2=0} = 0, \quad Q_2|_{z_2=0} = P_2|_{z_2=0}, \quad Q_1|_{z_2=-h_2} = 0, \quad (4)$$

$$Q_2|_{z_2=-h_2} = 0, \quad P_2|_{z_2=h_1} = 0 \quad (5)$$

та кінематичними

$$v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial z_2}|_{z_2=0} \quad (6)$$

граничними умовами. Тут введені такі позначення: u_i – компоненти вектора переміщень пружного тіла; λ_i – подовження пружного шару в напрямках координатних осей; a_{ij} та μ_{ij} – величини, які визначаються з рівнянь стану та залежать від виду пружного потенціалу [7]; $\bar{\sigma}_{ii}^0$ – початкові напруження ($s_{ii}^0 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0}{\lambda_i^2}$); ρ – щільність матеріалу пружного шару; v_i – компоненти вектора швидкості рідини; a_0 – швидкість звуку в рідині в стані спокою; Q_j та P_i – складові напружень у твердому тілі та рідині.

Далі параметри, що характеризують процес поширення хвиль, розшуковуються у класі біжучих хвиль, які обираються у вигляді:

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)], \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

де k – хвильове число, ω – кругова частота.

У подальшому розглядаються дві задачі Штурма-Ліувілля на власні значення для рівнянь руху пружного тіла та рідини. Розв'язуючи їх знаходяться відповідні власні функції. Після підстановки розв'язків у граничні умови (4)-(6) отримуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку, та, прирівнюючи визначник системи до нуля, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det \left\| e_{lm} \left(c_\sigma, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \omega h_1 / c_s, \omega h_2 / c_s \right) \right\| = 0, \quad l, m = \overline{1, 6}, \quad (8)$$

де c_σ – фазова швидкість нормальних хвиль у попередньо напруженому шарі, c_s ($c_s^2 = \mu / \rho$) – швидкість хвилі зсуву, μ – модуль зсуву, h_1 – товщина шару рідини, h_2 – товщина пружного шару, ρ_0 – щільність рідини.

Як відомо, у необмежених і напівобмежених тілах хвилі, що поширюються, є бездисперсійними. Особливістю даної пружно-рідинної системи є наявність не тільки границі контакту тіл, але і двох вільних поверхонь. Завдяки взаємодії на цих граничних поверхнях трьох хвиль: поздовжньої та поперечної в стисливому пружному шарі, а також поздовжньої в шарі ідеальної стислої рідини, виникають моди, які поширюються з дисперсією. Їх фазові швидкості складним чином залежать від частоти.

Відмітимо, що отримане дисперсійне рівняння (8) не залежить від форми пружного потенціалу. Воно є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду частинних випадків. Зокрема, якщо ввести додаткові припущення, то можна одержати рівняння для визначення швидкостей хвиль Релея, Стоунлі та Лемба, раніше ґрунтовно досліджених у роботах [8-10]. Вказані частинні випадки враховують наявність початкових деформацій у пружному шарі. Задачі, які було розглянуто в рамках цієї моделі, наведено в [3]. Якщо покласти $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$, то отримаємо рівності для добре досліджених у рамках класичної теорії пружності хвиль Релея, Стоунлі та Лемба [1, 2, 11].

Аналіз числових результатів. У подальшому дисперсійне рівняння (8) розв'язувалося чисельно. При цьому розрахунки проводилися для системи органічне скло – вода, яка характеризувалася наступними параметрами: пружний шар – $\rho = 1160$ кг/м³, $\mu = 1,86 \cdot 10^9$ Па; шар рідини – $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $a_0 = 1459,5$ м/с.

Зауважимо, що рівняння (8) виведено без будь-яких додаткових вимог до виду функції пружного потенціалу, тому воно має місце для пружних потенціалів довільної форми. У даній роботі для оргскла використовувався найпростіший триінваріантний потенціал у формі Мурнагана [7].

Результати обчислень представлені на рис.1-4.

На рис.1 для пружного шару, який не взаємодіє з рідиною, приведено залежності безрозмірних величин фазових швидкостей \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) мод Лемба від безрозмірної величини товщини пружного шару (частоти) \bar{h}_2 ($\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$) при відсутності початкових деформацій. Номерами n_a позначено антисиметричні моди, а n_s – відповідно симетричні моди.

На рис.2 представлені дисперсійні криві для гідропружного хвилеводу, які показують залежності безрозмірних фазових швидкостей мод Лемба \bar{c} від безрозмірної товщини пружного шару (частоти) \bar{h}_2 при взаємодії з товстим шаром рідини з товщиною $\bar{h}_1 = 20$ ($\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s$) теж за відсутності початкових деформацій.

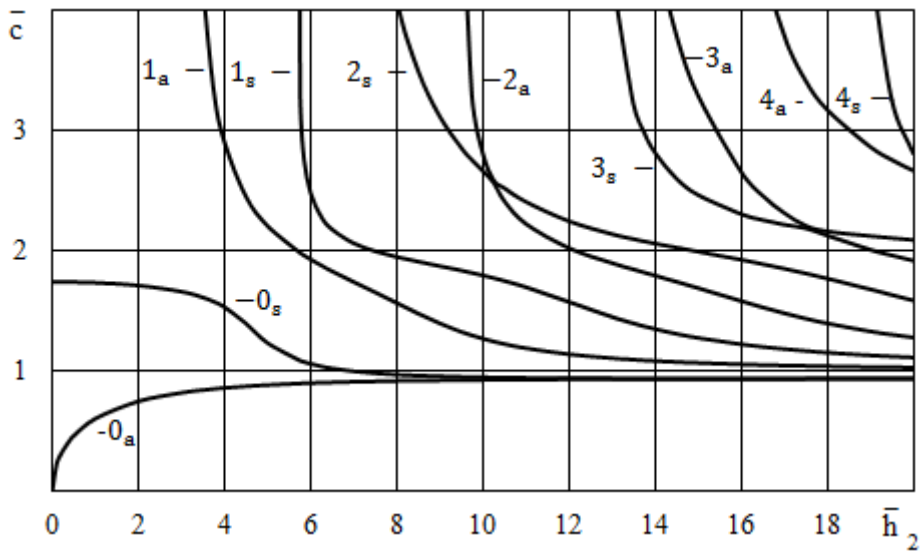


Рисунок 1

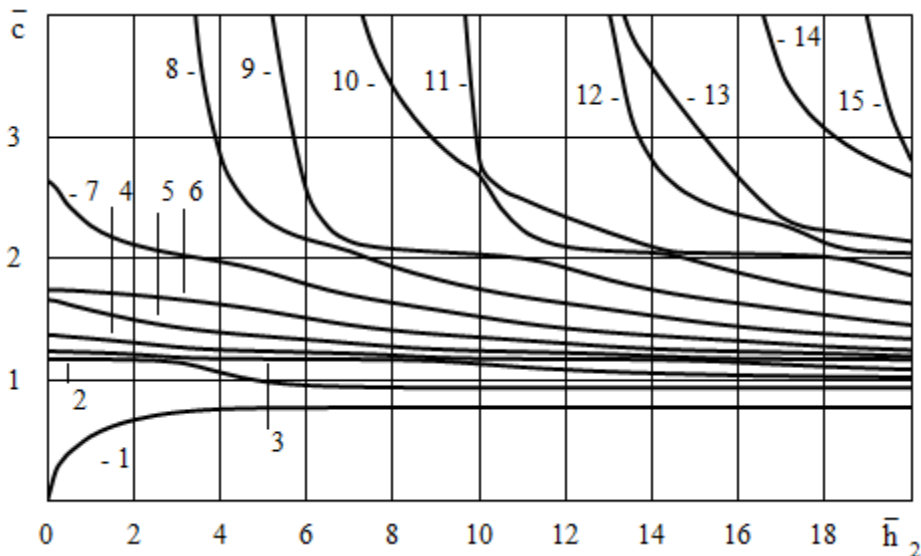


Рисунок 2