

6. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н.Гузь. – К.: А.С.К., 2004. – 672с.
7. Гузь А.Н. Введение в акустоупругость / А.Н.Гузь, Ф.Г.Махорт, О.И.Гуща. – К.: Наук. думка, 1977. – 152с.
8. Гузь А.Н. Волны в слое с начальными напряжениями / А.Н.Гузь, А.П.Жук, Ф.Г.Махорт. – К.: Наук. думка, 1976. – 104с.
9. Бабич С.Ю. Упругие волны в телах с начальными напряжениями / С.Ю.Бабич, А.Н.Гузь, А.П.Жук // Прикладная механика. – 1979. – **15**, № 4. – С.3-23.
10. Жук А.П. Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями / А.П.Жук // Прикладная механика. – 1980. – **16**, № 1. – С.113-116.
11. Волькенштейн М.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела / М.М.Волькенштейн, В.М.Левин // Акустический журнал. – 1988. – **34**, № 4. – С.608-615.

Надійшла до редколегії 22.05.2015.

УДК 539.3

ЗЕЛЕНСКИЙ В.С., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.  
БЫСТРОВ В.М., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.  
ДЕКРЕТ В.А., д.физ.-мат.н., вед. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С ОРТОТРОПНЫМИ СЛОЯМИ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ

**Введение.** Технология производства композитных материалов (КМ) и создания элементов конструкций из КМ предусматривает разработку практических алгоритмов их расчета на прочность и деформативность. При прочностном анализе элементов конструкций и образцов из КМ в качестве одного из механизмов потери их несущей способности и разрушения при сжатии может рассматриваться потеря устойчивости в структуре КМ [1]. Наиболее точным и строгим подходом при исследовании указанного механизма является использование общих уравнений трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) [2, 3] и модели кусочно-одно-родной среды. В работах [4-6] с использованием указанного подхода исследована устойчивость КМ и образца из КМ слоистой структуры при одноосном сжатии поверхностной нагрузкой армирующих слоев для случая неоднородного докритического состояния, связанного с условиями нагружения. В этих работах задачи устойчивости рассматривались в двумерной постановке для случая плоской деформации. Показано, что в зависимости от граничных условий для конкретной расчетной модели, в композите может иметь место, как внутренняя потеря устойчивости, так и приповерхностная потеря устойчивости, которая соответствует механизму разрушения композита в виде смятия торцов [1]. В работе [7] исследована пространственная задача устойчивости образца в виде слоистой прямоугольной пластины с изотропными слоями при одноосном сжатии в плоскости армирования. Критические параметры устойчивости образца определялись с учетом различных геометрических характеристик внутренней структуры материала. Как показали проведенные исследования, используемый подход, в отличие от приближенных подходов, дает возможность получить результаты, соответствующие физике процессов, происходящих в КМ с принятой в механике точностью. Этот подход также позволяет провести оценку результатов, полученных с применением приближенных

теорій і расчетних схем, використовуваних при расчеті конструкцій з традиційних матеріалів.

В продовження робіт [7, 8] в нинішній статті розглянута просторова задача стійкості двохкомпонентного КМ з ортотропними і ізотропними шарами, знаходящогося в умовах одноосного поверхневого навантаження в площині розміщення шарів. З урахування складності отримання аналітичних рішень для рішення задачі стійкості застосовуються чисельні методи. Для побудови дискретних моделей, відповідних дифференціальних задач використана концепція базових факторів [9] в рамках об'єктно-орієнтованого підходу.

**Постановка задачі.** Розглядається КМ, який представляє собою періодичну структуру, утворену чередуванням ізотропних і трансверсально-ізотропних шарів. Трансверсально-ізотропний матеріал зберігає всі специфічні властивості ортотропного матеріалу з малою сдвиговою жорсткістю і разом з тим дозволяє зменшувати кількість параметрів, від яких залежить критичне навантаження. Композитний матеріал моделюється нескінченною в напрямленні  $Ox_1$  областю і має кінцевий розмір в напрямленні  $Ox_2$  і  $Ox_3$  (рис.1). Така расчетна модель дозволяє урахувати, як втрату стійкості в структурі матеріалу, так і зразка в цілому.

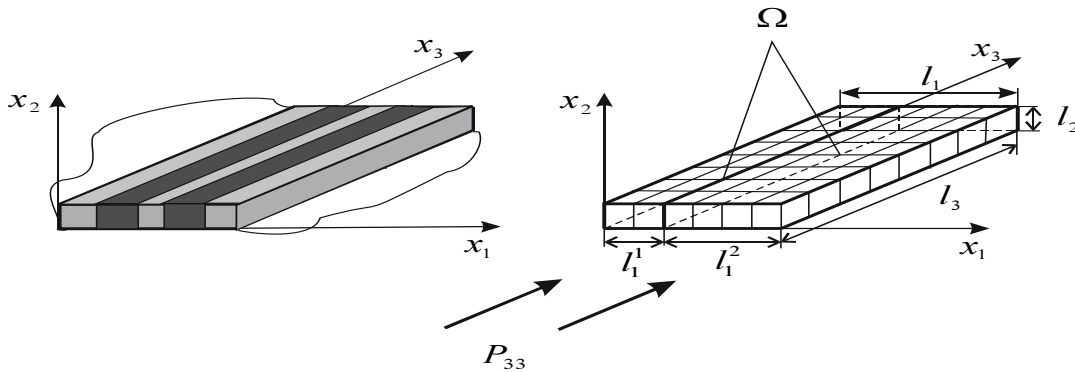


Рисунок 1 – Композитний матеріал

Рисунок 2 – Расчетная область

Шари розміщені паралельно площині  $x_1 = const$ . На торці  $x_3 = 0$  шари стискаються рівномірною навантаженням постійної інтенсивності  $P = P_{33}$ . На протилежному торці використовуються умови жорсткого торцевого закріплення шарів. Расчетна область вибирається з умови періодичності структури композита і симетрії умов навантаження і закріплення. Граничні умови на бокових сторонах зразка відповідають умовам симетрії. Таким чином, задача стійкості формулюється на параметрі структури матеріалу  $V = \{0 \leq x_1 \leq (l_1^1 + l_1^2), 0 \leq x_2 \leq l_2, 0 \leq x_3 \leq l_3\}$ , представляючого собою зразок з КМ в формі двохшарової прямокутної пластини (рис.2). Расчетна область дає можливість дослідити стійкість, як композитного матеріалу, так і елемента конструкції з цього матеріалу з відповідними граничними умовами. Критичні параметри стійкості визначаються при різних геометричних характеристиках компонент композитного матеріалу.

Припускається, що поверхневе навантаження реалізується в формі «мертвої» навантаження, що забезпечує виконання достаточних умов застосування статичного методу ТЛТУДТ [3]. В формулюємої постановки задачі стійкості початковий стан є неоднорідним. Його компоненти визначаються з рівнянь лінійної теорії пружості. Уравнения лінійної теорії пружості і граничні умови

вместе с основными соотношениями для каждого слоя расчетной области  $k, (k = 1, 2) \in \Omega$  имеют вид:

уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,i}^0 = 0, \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \text{ при } x_1 = (0, l_1) \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2 \wedge 0 \leq x_3 \leq l_3), \\ \sigma_{im}^0 &= 0 \text{ при } x_2 = (0, l_2) \wedge (0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge 0 \leq x_3 \leq l_3), \\ \sigma_{33}^0 &= P_{33}, \quad u_1 = u_2 = 0 \text{ при } x_3 = 0 \wedge (0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2), \\ u_m &= 0 \text{ при } x_3 = l_3 \wedge (0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2); \end{aligned} \quad (2)$$

условия на контакте

$$[u_m] = 0, \quad \left[ \sigma_{im}^0 \right] = 0 \text{ при } x_1 = l_1^1 \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2 \wedge 0 \leq x_3 \leq l_3), \quad (3)$$

где  $[ ]$  – скачек функции  $f(x)$ , индекс  $k$  опускаем.

В пределах каждого слоя КМ соотношения закона Гука имеют вид:

$$\sigma_{ij}^0 = \delta_{ij} A_{ik} u_{k,k}^0 + (1 - \delta_{ij}) G_{ij} (u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0), \quad (4)$$

где  $A_{ij}, G_{ij}$  – коэффициенты упругости и модули сдвига изотропного и трансверсально-изотропного тела. При вычислении  $A_{ij}, G_{ij}$  для трансверсально-изотропного тела с осью изотропии  $Ox_3$  и плоскостью изотропии  $x_1Ox_2$  необходимо положить:

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 = E, \quad E_3 = E', \quad G' = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad G_{13} = G_{23} = G, \\ \nu_{12} = \nu_{21} = \nu, \quad \nu_{13} = \nu_{23} = \nu', \quad \nu_{32} = \nu_{31} = \nu''. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения и граничные условия ТЛТУДТ для рассматриваемой расчетной схемы запишутся в виде:

уравнения в возмущениях

$$\left( \sigma_{im} + \lambda \sigma_{ik}^0 u_{m,k} \right)_i = 0, \quad x \in \Omega; \quad (6)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} \left( \sigma_{33} + \lambda \sigma_{3j}^0 u_{3,j} \right) = 0, \quad u_1 = u_2 = 0 \text{ при } x_3 = 0 \wedge (0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2), \\ u_i = 0 \text{ при } x_3 = 0 \wedge (0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2), \\ u_1 = 0 \text{ при } x_1 = (0, l_1) \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2 \wedge 0 \leq x_3 \leq l_3), \\ \sigma_{im} = 0 \text{ при } x_2 = (0, l_2) \wedge (0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge 0 \leq x_3 \leq l_3); \end{aligned} \quad (7)$$

условия на контакте слоев

$$[u_m] = 0, \quad \left[ \sigma_{im}^0 \right] = 0 \text{ при } x_1 = l_1^1 \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2 \wedge 0 \leq x_3 \leq l_3). \quad (8)$$

Интенсивность критической нагрузки определяется по формуле

$$P_{кр} = \min|\lambda| \frac{1}{(l_1^1 + l_1^2)l_2} \int_0^{l_1^1 + l_1^2} \int_0^{l_2} P_{33}(x_1, x_2, x_3)|_{x_3=0} dx_1 dx_2. \quad (9)$$

где  $\min|\lambda|$  – минимальное по модулю собственное число задачи (6)-(8),  $P_{33}$  – интенсивность начальной нагрузки, приложенной к граничному участку  $x_3 = 0$  (рис.2),  $\wedge$  – знак логического сложения.

Для численного решения задачи методом сеток в расчетной области  $\Omega$  (рис.2) вводится по каждому из направлений  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  неравномерная разностная сетка  $\bar{\omega} = \omega + \gamma$ , состоящая из множества  $\omega$  внутренних и множества  $\gamma$  граничных узлов. Сетка  $\bar{\omega}$  разбивает расчетную область на  $M$  прямоугольных параллелепипедов и содержит  $N$  узлов, в каждом из которых строится аппроксимация дифференциальных уравнений задач (1)-(6), (8)-(13). Дифференциальным задачам (1-5), (6-8) ставятся в соответствие разностные задачи

$$Ay = \Phi, \quad x \in \bar{\omega}, \quad (10)$$

$$Ay = \mu By, \quad x \in \bar{\omega}. \quad (11)$$

Построение задач (10), (11) осуществлялось в соответствии с методикой, изложенной в работе [9]. Для решения дискретных задач (10), (11) использованы численные методы (прямые и итерационные) [10]. Эффективность методики решения дискретных задач (10), (11) достигалась за счет использования динамической разностной сетки и комбинированного применения выбранных методов. Конечная разностная сетка, на которой было получено решение с заданной точностью, содержала 16384 узла.

**Результаты работы.** Рассмотрен КМ, слои которого характеризуются следующими механическими постоянными:  
 изотропный слой:  $E=52$ ГПа,  $G=20$ ГПа,  $\nu = 0,3$ ;  
 трансверсально-изотропный слой:  $E_1=E_2=52$ ГПа,  $E_3=30$ ГПа,  $G_{12}=20$ ГПа,  $G_{13}=G_{23}=10$ ГПа,  $\nu = 0,3$ ,  $\nu_{13} = 0,2$ ,  $\nu_{23} = 0,1$ .

При фиксированном значении параметра  $l_3$  определялись критические характеристики устойчивости КМ для различных значений параметра тонкостенности  $\alpha = \frac{\pi d_2}{2l_1}$ ,

$\alpha = (0,32; 0,24; 0,16; 0,08)$ . При тех же геометрических характеристиках вычислялись критические характеристики устойчивости КМ для расчетной схемы с изотропными слоями.

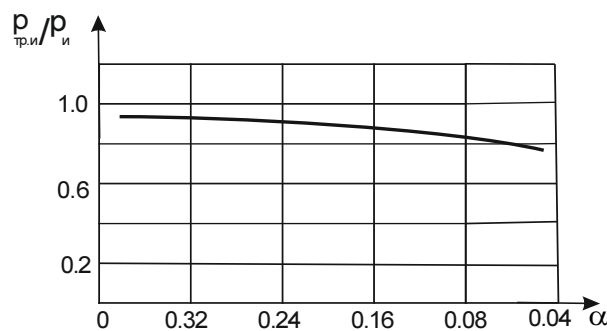


Рисунок 3 – Зависимость отношения критических нагрузок от параметра тонкостенности

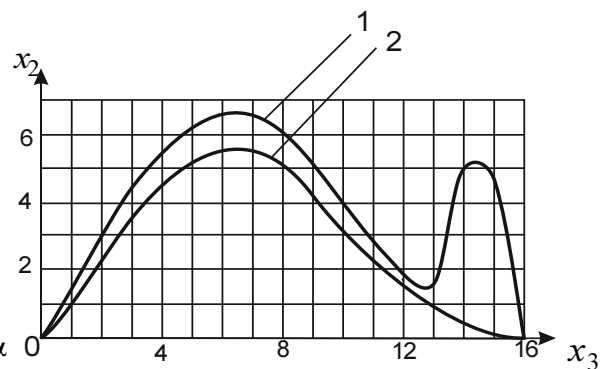


Рисунок 4 – Формы потери устойчивости

На рис.3 приведена зависимость  $P_{тр.и}/P_{и}$  от параметра  $\alpha$ , где  $P_{тр.и}$  – критическая нагрузка полученная для КМ с трансверсально-изотропными и изотропными слоями,  $P_{и}$  – критическая нагрузка, полученная для КМ с изотропными слоями. На рис.4 в качестве примера приведены эпюры смещений  $u_2(l_1^1, l_2, x_3)$  при  $0 \leq x_3 \leq l_3$  на контакте слоев рассмотренных материалов для параметра тонкостенности  $\alpha = 0,16$ . Кривая 1 соответствует КМ с трансверсально-изотропными слоями, кривая 2 – КМ с изотропными слоями. Особенность поведения зависимости  $u_2(l_1^1, l_2, x_3)$  для КМ с трансверсально-изотропными слоями вблизи границы  $x_3 = 0$ , по-видимому, вызвана условиями жесткого защемления слоев.

**Выводы.** Как видно из рис.3 при заданных механических характеристиках с уменьшением параметра тонкостенности  $\alpha$  влияние ортотропии на критические параметры композитного материала возрастает.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии. В 2-х т. (Т.1. Разрушение в структуре материала / Гузь А.Н. – 592с. Т.2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.) – К.: “ЛИТЕРА”, 2008.
2. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел/ Гузь А.Н. – К.: Вища школа, 1986. – 512с.
3. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies/ Guz A.N. – Berlin: Springer-Verlag Heilberg, 1999. – 555 p.
4. Зеленский В.С. Устойчивость слоистого композитного материала при одноосном нагружении / Зеленский В.С., Декрет В.А., Быстров В.М. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки). – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2012. – Випуск 2(19). – С.49-53.
5. Быстров В.М. Численное исследование слоистых композитов при неоднородном докритическом состоянии/ Быстров В.М., Декрет В.А., Зеленский В. С. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки). – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2014. – Випуск 1(24). – С.157-164.
6. Декрет В.А. Численное исследование устойчивости слоистого композита при одноосном сжатии слоев наполнителя / Декрет В.А., Зеленский В.С., Быстров В.М. // Прикладная механика. – 2014. – № 5. – С.80-91.
7. Зеленский В.С. Влияние геометрических параметров слоистой прямоугольной пластины на величину критической нагрузки при одноосном сжатии / Зеленский В.С., Быстров В.М, Декрет В. А. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки). – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2013. – Випуск 2(22). – С.41-46.
8. Коханенко Ю.В. Влияние длины прямоугольной пластины на величину критической нагрузки при одноосном сжатии (трехмерная теория устойчивости) / Коханенко Ю.В., Зеленский В.С. // Доп. НАН України. – 2003. – №4. – С.48-51.
9. Статика материалов / Под ред. А.Н.Гузя. – Киев: Наук. думка, 1993. – 453с. (Механика композитов: в 12 т. Т.3)
10. Бахвалов Н.С. Численные методы / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П. – М.: Наука. 1987. – 598с.

Поступила в редколлегию 26.05.2015.