УДК 539.3

ХОМА И.Ю., д.физ.-мат.н., вед. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

МЕТОД РЕЙССНЕРОВЫХ АЛГОРИТМОВ В ТЕОРИИ ИЗГИБА ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Введение. Для построения уравнений упругого равновесия нетонких трансверсально-изотропных пластин используются разные методы. Одним из эффективных является метод разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\xi)$ координаты толщины $\xi = h^{-1}x_3$, $x_3 \in [-h, h]$. В случае изгиба пластины компоненты вектора перемещений $u_j(\vec{x})$ $(j = 1,2,3)$ представляются формулами [1,2]

$$u_\alpha(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} u_\alpha^{(2k-1)}(x_1, x_2) P_{2k-1}(\xi) \ (\alpha = 1,2); \ u_3(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{n} u_3^{(2k)}(x_1, x_2) P_{2k}(\xi). \quad (1)$$

Относительно коэффициентов разложения $u_j^{(m)}(x_1, x_2)$, как функций двух независимых переменных, вариационным способом выводится система дифференциальных уравнений и соответствующие граничные условия

$$c_{66}\Delta u_+^{(2k-1)} + (c_{12} + c_{66})\frac{\partial e^{(2k-1)}}{\partial x_\alpha} + \frac{4k-1}{h}\left[\sum_{s=0}^{n} \lambda_{2s}^{(k)} \frac{\partial u_3^{(2s)}}{\partial x_\alpha} - \frac{c_{44}}{h}\sum_{s=1}^{n} \alpha_{2s-1}^{(k)} u_\alpha^{(2s-1)}\right] = 0;$$

$$c_{44}\Delta u_3^{(2k)} + \frac{4k+1}{h}\left[\sum_{s=1}^{n} \gamma_{2s}^{(k)} e^{(2s-1)} - \frac{c_{33}}{h}\sum_{s=1}^{n} \beta_{2s}^{(k)} u_3^{(2s)}\right] = 0 \ \left(k = \overline{0,n}\right), \quad (2)$$

где Δ – оператор Лапласса, c_{ij}, c_{44}, c_{66} – упругие постоянные материала;

$$\lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, 0 \le s < k, \\ c_{13}, k \le s \le n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), 1 \le s \le k, \\ k(2k+1), k \le s \le n. \end{cases}$$

Постановка задачи. Изложим способ построения уравнений равновесия трансверсально-изотропных пластин, исходя из метода Рейсснеровых алгоритмов [3]. Представим, согласно [3, 4], коэффициенты разложения $u_j^{(m)}(x_1, x_2)$ в виде формул

$$u_\alpha^{(2k-1)}(x_1, x_2) = (-1)^k h^{2k-1} \frac{\partial \Delta^{k-1} u}{\partial x_\alpha} \ (\alpha = 1,2); \ u_3^{(2k)}(x_1, x_2) = (-1)^k h^{2k} \Delta^k u, \quad (3)$$

где $u = u(x_1, x_2)$ – произвольная достаточно гладкая вещественная функция. Тогда равенства (1) примут вид

$$u_\alpha(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{2k-1} \frac{\partial \Delta^{k-1} u}{\partial x_\alpha} P_{2k-1}(\xi) \ (\alpha = 1,2);$$

$$u_3(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k h^{2k} \Delta^k u \, P_{2k}(\xi). \tag{4}$$

Здесь $m = n-1$ или $m = n$.

Согласно (4), компоненты деформаций представляются таким образом

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{2k-1} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_1^2} P_{2k-1}(\xi);$$

$$e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{2k-1} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_2^2} P_{2k-1}(\xi);$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{2k-1} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_1 \partial x_2} P_{2k-1}(\xi);$$

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k h^{2k-1} \Delta^k u \sum_{s=1}^{k} (4s-1) P_{2s-1}(\xi) = \sum_{k=1}^{m} (4k-1)(-1)^k h^{2k-1} \Delta'^{(k)} u \, P_{2k-1}(\xi);$$

$$e_{\alpha 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k h^{2k} \left[\frac{\partial \Delta^k u}{\partial x_\alpha} + (4k+1)\frac{\partial \Delta''^{(k)} u}{\partial x_\alpha}\right] P_{2k}(\xi), \tag{5}$$

где

$$\Delta'^{(k)} u = \sum_{s=k}^{n} (-1)^{s-k} h^{2(s-k)} \Delta^s u; \quad \Delta''^{(k)} u = \sum_{s=k}^{n-1} (-1)^{s-k+1} h^{2(s-k)} \Delta^s u. \tag{6}$$

Соотношения упругости для трансверсально-изотропного тела принимают вид

$$\sigma_{11} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{2k-1} \left(c_{11} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_1^2} + c_{12} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_2^2} + (4k-1) c_{13} \Delta'^{(k)} u \right) P_{2k-1}(\xi);$$

$$\sigma_{22} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{2k-1} \left(c_{12} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_1^2} + c_{11} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_2^2} + (4k-1) c_{13} \Delta'^{(k)} u \right) P_{2k-1}(\xi);$$

$$\sigma_{33} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{2k-1} \left(c_{13} \Delta^k u + (4k-1) c_{33} \Delta'^{(k)} u \right) P_{2k-1}(\xi); \quad \sigma_{12} = 2c_{66} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{2k-1} \times$$

$$\times \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_1 \partial x_2} P_{2k-1}(\xi); \quad \sigma_{\alpha 3} = c_{44} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k h^{2k-1} \left(\frac{\partial \Delta^k u}{\partial x_\alpha} - (4k+1) \frac{\partial \Delta''^{(k)} u}{\partial x_\alpha} \right) P_{2k}(\xi). \tag{7}$$

Результаты работы. Предположим, что на плоских гранях пластины $x_3 = h$, $x_3 = -h$ заданы напряжения

$$\sigma_{\alpha 3}(x_1, x_2, \pm h) = 0 \quad (\alpha = 1, 2); \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h) = \pm p(x_1, x_2), \tag{8}$$

а на цилиндрической поверхности выполняются однородные условия, выраженные в перемещениях и напряжениях. Для построения уравнений равновесия пластины воспользуемся вариационным принципом, требующим стационарности функционала

$$J(v) = \frac{1}{2} a(u,v) - f(v) < \infty , \tag{9}$$

где $a(u,v)$ – симметричная билинейная форма

$$a(u,v) = \iiint\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(u) e_{ij}(v) d\Omega ; \tag{10}$$

$f(v)$ – линейная форма, которая представляется таким образом

$$f(v) = \iint\limits_{S} \left[v_3(x_1, x_2, h) + v_3(x_1, x_2, -h) \right] \frac{1}{2} p(x_1, x_2) dS . \tag{11}$$

Принимая v за виртуальное значения δu из (9) получим уравнение

$$\iint\limits_{S} dS \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{ij}(u) \delta e_{ij}(u) dx_3 = \frac{1}{2} \iint\limits_{S} p(x_1, x_2) \delta\left(u_3^{+} + u_3^{-}\right) dS = 0 . \tag{12}$$

Из вариационного уравнения осуществляется вывод уравнений упругого равновесия пластины и соответствующие ему граничные условия. Если внести значения функций (5), (7) в уравнение (12) и провести ряд преобразований, то получим дифференциальное уравнение и граничные условия. Поставленная задача в произвольном приближении сопряжена со значительными громоздкими выкладками, поэтому предлагается [4] проводить вывод разрешающих уравнений последовательно, начиная с простейшего приближения $n = 1$, $m = 0$. В этом случае деформации определяются так

$$e_{11} = -h P_1(\xi) \partial_1^2 u ; \; e_{22} = -h P_1(\xi) \partial_2^2 u ; \; e_{12} = -h P_1(\xi) \partial_1 \partial_2 u ; \; e_{j3} = 0 \; \left(j = 1,2,3\right), \tag{13}$$

где $\partial_\alpha = \partial / \partial x_\alpha$, а компоненты напряжений представляются следующими формулами

$$\sigma_{11} = -h P_1(\xi) \left(c_{11} \partial_1^2 u + c_{12} \partial_2^2 u \right) ; \; \sigma_{22} = -h P_1(\xi) \left(c_{12} \partial_1^2 u + c_{11} \partial_2^2 u \right) ;$$
$$\sigma_{12} = -2 h c_{66} \partial_1 \partial_2 u ; \; \sigma_{j3} = 0 . \tag{14}$$

Подставляя выражения (13), (14) в равенство (12), получим, после усреднения по координате x_3, уравнение

$$\iint\limits_{S} \Big\{ \left(c_{11} \partial_1^2 u + c_{12} \partial_2^2 u \right) \partial_1^2 (\delta u) + \left(c_{12} \partial_1^2 u + c_{11} \partial_2^2 u \right) \partial_2^2 (\delta u) +$$
$$+ 4 c_{66} \partial_1 \partial_2 u \, \partial_1 \partial_2 \delta u - 3 p \delta u / 2h^3 \Big\} dS = 0 . \tag{15}$$

Отсюда, после интегрирования по частям и применения формул Грина, получим уравнение равновесия пластины $\Delta\Delta u = 3p / 2 c_{11} h^3$ и граничные условия

$$c_{11} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + 2 c_{66} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial s} \right) = 0 ; \quad c_{12} \Delta u + 2 c_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0 , \tag{16}$$

где $\vec{n}$ – орт внешней нормали к граничной кривой L, ∂s – элемент длины дуги L.

Для приближения $n=1$, $m=1$ имеем такие значения составляющих тензора деформаций

$$e_{11}=-hP_1(\xi)\partial_1^2 u;\ e_{22}=-hP_1(\xi)\partial_2^2 u;\ e_{12}=-hP_1(\xi)\partial_1 u\partial_2 u;$$

$$e_{33}=-3hP_1(\xi)\Delta u;\ 2e_{\alpha 3}=-h^2P_2(\xi)\partial_\alpha\Delta u\ \ (\alpha=1,2) \tag{17}$$

и напряжений

$$\sigma_{11}=-hP_1(\xi)\left(c_{11}\partial_1^2u+c_{12}\partial_2^2u+3c_{13}\Delta u\right);\ \sigma_{12}=-2c_{66}hP_1(\xi)\partial_1\partial_2 u;$$

$$\sigma_{22}=-hP_1(\xi)\left(c_{12}\partial_1^2u+c_{11}\partial_2^2u+3c_{13}\Delta u\right);\ \sigma_{\alpha 3}=-2c_{44}h^2P_2(\xi)\partial_\alpha\Delta u;$$

$$\sigma_{33}=-hP_1(\xi)(c_{13}+3c_{33})\Delta u. \tag{18}$$

Учитывая равенства (17) и (18), вариационное уравнение (12) преобразуется к виду

$$\iint\limits_S\Big\{\left(c_{11}\partial_1^2u+c_{12}\partial_2^2u+3c_{13}\Delta u\right)\partial_1^2(\delta u)+\left(c_{12}\partial_1^2u+c_{11}\partial_2^2u+3c_{13}\Delta u\right)\partial_2^2(\delta u)+$$

$$+4c_{66}\partial_1\partial_2u\,\partial_1\partial_2(\delta u)+3(c_{13}+3c_{33})\Delta u\Delta(\delta u)+$$

$$+0,6c_{44}h^2\left(\partial_1\Delta u\,\partial_1\Delta(\delta u)+\partial_2\Delta u\,\partial_2\Delta(\delta u)\right)-1,5ph^{-3}\left(\delta u-h^2\Delta(\delta u)\right)\Big\}dS=0. \tag{19}$$

Отсюда способом, аналогичным изложенному выше, выводим дифференциальное уравнение

$$\left(1+\frac{3c_{13}+9c_{33}}{c_{11}}\right)\Delta\Delta u-\frac{3c_{44}h^2}{5c_{11}}\Delta\Delta\Delta u=\frac{3}{2c_{11}h^3}\left(p-h^2\Delta p\right) \tag{20}$$

и граничные условия

$$\frac{\partial\Delta u}{\partial n}=0;\ -c_{66}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial n}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial s}\right)+\frac{3c_{44}h^2}{5}\frac{\partial\Delta\Delta u}{\partial n}-\frac{3}{4h}\frac{\partial p}{\partial n}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\frac{c_{12}+3c_{13}+9c_{33}}{2c_{66}}\Delta u-\frac{3p}{4h}=0. \tag{21}$$

Таким же способом определяются уравнения равновесия и граничные условия для последующих приближений.

Выводы. Методом Рейсснеровых алгоритмов построены уравнения упругого равновесия трансверсально-изотропных пластин постоянной толщины. Для первых приближений по базовым функциям (полиномам Лежандра) получены дифференциальные уравнения и соответствующие краевые условия на границе области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / Векуа И.Н. – М.: Наука, 1982. – 285с.
2. Khoma I.Yu. Representation of the solution of the deflection equilibrium equations for thick transversaly isotropic plates / Khoma I.Yu. // J. of Math. Sciences. – 2001. – 103, № 3. – P.306-313.

3. Babuška I. Reissnerian algorithms in the theory of elasticity/ Babuška I., Práger M. // Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Ser. des Sci. Tech. – 1960. – V. 8, N 8. – P.411-417.
4. Hanuška A. Contribution to the Reissnerian algorithm in the theory of bending of elastic plates / Hanuška A. // Aplikace Matematiky. – 1967. – V. 6, N 12. – P.449-467.

Поступила в редколлегию 11.06.2015.

УДК 534.21

КОВАЛЕНКО А.П., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.
ШЕКЕРА М.К., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ ОБОЛОЧКА ВРАЩЕНИЯ – ЖИДКОСТЬ

Введение. В разного типа технических устройствах зачастую используются механические системы которые можно рассматривать как оболочки вращения с жидкостью. Часто такие системы подвергаются динамическим продольным наружениияим (железнодорожные цистерны, бочкообразные конструкции и т.п.). Математическое моделирование таких гидроупругих систем может снизить аварийность и позволит более тщательно учитывать взаимодействие элементов таких систем при продольных ударных нагружениях.

Исследования в этой области проводятся на протяжении последних десятилетий. В работах рассматриваются как правило цилиндрические оболочки с жидкостью [1-5]. Одной из распространенных является модель типа Тимошенко для оболочки и рассмотрение жидкости в акустическом приближении. Рассматриваются задачи как в нелинейной так и в линейной постановке. Для исследования переходных процессов зачастую достаточно ограничиться линейной постановкой задачи. Анализ публикаций показывает, что приемлемую точность решения дают приближенные методы решения задачи о переходных процессах в оболочке с жидкостью в линейной постановке и рассмотрение жидкости в акустическом приближении [6-8].

Целью работы является построение математической модели для исследования переходных процессов в механических системах оболочка вращения-жидкость при продольном динамическом нагружении.

Основной материал исследования. Рассматривается упругая тонкостенная оболочка вращения с жидкостью. Вводится цилиндрическая система координат x', r', θ, причем ось x' направлена по оси симметрии оболочки с началом на торце оболочки $x' = 0$, l' – длина оболочки, $r' = f'(x')$ – уравнение медиана срединной поверхности вращения оболочки. На срединной поверхности оболочки введена система ортогональных криволинейных координат α_1, α_2 таким образом, что линия $r' = f'(x')$ совпадает с линией $\alpha_2 = const$. Следовательно в каждой точке срединной поверхности заданы базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, причем $\vec{e}_1$ направим по касательной к линии $\alpha_2 = const$. Единичный вектор $\vec{n}$ направим по внешней нормали к плоскости, образованной ортами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Давление жидкости в состоянии покоя и давление с наружной стороны равны между собой и имеют значение P_0. В сечениях $x' = 0$ и $x' = l'$ находятся жесткие пла-