3. Babuška I. Reissnerian algorithms in the theory of elasticity/ Babuška I., Práger M. // Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Ser. des Sci. Tech. – 1960. – V. 8, N 8. – P.411-417.
4. Hanuška A. Contribution to the Reissnerian algorithm in the theory of bending of elastic plates / Hanuška A. // Aplikace Matematiky. – 1967. – V. 6, N 12. – P.449-467.

Поступила в редколлегию 11.06.2015.

УДК 534.21

КОВАЛЕНКО А.П., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.
ШЕКЕРА М.К., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ ОБОЛОЧКА ВРАЩЕНИЯ – ЖИДКОСТЬ

Введение. В разного типа технических устройствах зачастую используются механические системы которые можно рассматривать как оболочки вращения с жидкостью. Часто такие системы подвергаются динамическим продольным наружениияим (железнодорожные цистерны, бочкообразные конструкции и т.п.). Математическое моделирование таких гидроупругих систем может снизить аварийность и позволит более тщательно учитывать взаимодействие элементов таких систем при продольных ударных нагружениях.

Исследования в этой области проводятся на протяжении последних десятилетий. В работах рассматриваются как правило цилиндрические оболочки с жидкостью [1-5]. Одной из распространенных является модель типа Тимошенко для оболочки и рассмотрение жидкости в акустическом приближении. Рассматриваются задачи как в нелинейной так и в линейной постановке. Для исследования переходных процессов зачастую достаточно ограничиться линейной постановкой задачи. Анализ публикаций показывает, что приемлемую точность решения дают приближенные методы решения задачи о переходных процессах в оболочке с жидкостью в линейной постановке и рассмотрение жидкости в акустическом приближении [6-8].

Целью работы является построение математической модели для исследования переходных процессов в механических системах оболочка вращения-жидкость при продольном динамическом нагружении.

Основной материал исследования. Рассматривается упругая тонкостенная оболочка вращения с жидкостью. Вводится цилиндрическая система координат x', r', θ, причем ось x' направлена по оси симметрии оболочки с началом на торце оболочки $x' = 0$, l' – длина оболочки, $r' = f'(x')$ – уравнение медиана срединной поверхности вращения оболочки. На срединной поверхности оболочки введена система ортогональных криволинейных координат α_1, α_2 таким образом, что линия $r' = f'(x')$ совпадает с линией $\alpha_2 = const$. Следовательно в каждой точке срединной поверхности заданы базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, причем $\vec{e}_1$ направим по касательной к линии $\alpha_2 = const$. Единичный вектор $\vec{n}$ направим по внешней нормали к плоскости, образованной ортами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Давление жидкости в состоянии покоя и давление с наружной стороны равны между собой и имеют значение P_0. В сечениях $x' = 0$ и $x' = l'$ находятся жесткие пластины, препятствующие вытеканию жидкости, определенным образом закрепленные на торцах оболочки. Предположим, что торец $x'=0$ оболочки свободен, а торец $x'=l'$ определенным образом закреплен или свободен.

Конечной целью исследований является изучение переходных процессов в системе. Поэтому необходимо выбирать такие модели для оболочки и жидкости, которые в состоянии описывать распространение волновых возмущений. Для описания движения оболочки используются уравнения типа Тимошенко в перемещениях [9]. Для описания закона движения жидкости – уравнения Навье-Стокса [10].

Вектор полного перемещения оболочки $\vec{\Phi}$ в точке $P(\alpha_1,\alpha_2,z)$ примем, как обычно, по сдвиговой модели Тимошенко [9] в виде $\vec{\Phi}=\vec{F}+z\vec{\gamma}$, где $\vec{F}=\vec{e}_1U_1'+\vec{e}_2U_2'+\vec{n}W'$ – вектор перемещений срединной поверхности; $\vec{\gamma}=\vec{e}_1\gamma_1+\vec{e}_2\gamma_2$ – вектор угла поворота нормального элемента; z – координата, отсчитываемая вдоль направления, обозначенного ортом $\vec{n}$. Рассматривается осесимметричное движение. В этом случае $U_2'=\gamma_1=0$. Явный вид дифференциальных операторов теории упругих оболочек типа Тимошенко можно получить из общего случая уравнения движения произвольной оболочки [9]. В работе [11] показана применимость приближенных теорий оболочек при исследовании переходных процессов.

Тогда задача об исследовании переходных процессов в изучаемой системе оболочка-жидкость сведется к решению следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} L_1\left(U_1',W',\gamma_2\right)-\rho_1 h'\frac{\partial^2 U_1'}{\partial t'^2}&=g_1,\\ L_2\left(U_1',W',\gamma_2\right)-\rho_1 h'\frac{\partial^2 W'}{\partial t'^2}&=\left(P-P_0\right)+g_2,\\ L_3\left(U_1',W',\gamma_2\right)-\frac{\rho_1 h'^3}{12}\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t'^2}&=g_3,\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{V'}}{\partial t'}+\left(\overrightarrow{V'}grad\overrightarrow{V'}\right)=\vec{Q}-\frac{gradP}{\rho}+\frac{\mu graddiv\overrightarrow{V'}}{3\rho}+\frac{\mu\Delta\overrightarrow{V'}}{\rho}, \qquad 2)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t'}+div\rho\overrightarrow{V'}=0, \tag{3}$$

$$\Omega\left(P,\rho\right)=0. \tag{4}$$

Здесь (1) – уравнения движения упругой оболочки вращения в перемещениях [9] с учетом напряжений на внутренних стенках, вызванных наличием вязкой жидкости и внешнего давления P_0 [10]. Уравнение (2) – уравнение движения вязкой слабосжимаемой изотропной жидкости в векторной форме [10]. Уравнения (3) и (4) – суть уравнения неразрывности для жидкости [10] и уравнения состояния жидкости [10, 12] соответственно. Неизвестными функциями в этих уравнениях являются $U_1',W',\gamma_2,\overrightarrow{V'},\rho,P$.

В уравнениях (1)-(4) приняты следующие обозначения: ρ_1,h' – плотность материала и толщина стенки оболочки; P – давление в жидкости; g_i $(i=\overline{1,3})$ – функции, зависящие от параметров жидкости, которые учитывают напряжение на внутренних стенках оболочки (при отсуствии вязкости $\mu=0, g_i$=0, $(i=\overline{1,3})$); $\overrightarrow{V'}$ – вектор скорости частиц жидкости; $\vec{Q}$ – вектор массовой силы, отнесенный к единице массы жидкости; ρ,μ – плотность и коэффициент жидкости, Δ – оператор Лапласа в пространстве занятом жидкостью.

В уравнениях (1) $L_i\left(U_1', W', \gamma_2\right)$ $(i=\overline{1,3})$ – известные дифференциальные операторы теории упругих оболочек типа Тимошенко. Явный вид этих операторов можно получить из общего случая уравнений движения произвольной оболочки, полученных К.З.Галимовым [9]. Эти операторы в тензорных обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} L_1\left(U_1', W', \gamma_2\right) &= \nabla_i T^{i1} - b_i^1 N^i, \\ L_2\left(U_1', W', \gamma_2\right) &= \nabla_i N^i - b_{ik} T^{ik}, \\ L_3\left(U_1', W', \gamma_2\right) &= \nabla_i M^{i2} - N^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь ∇_i $(i=1,2)$ символ ковариантного дифференцирования относительно ковариантных компонент метрического тензора срединной поверхности оболочки a_{ik};

$$\nabla_k \mathrm{N}^i = \frac{\partial N^i}{\partial a^k} + \Gamma_{kj}^i \mathrm{N}^j, \; \nabla_j \mathrm{T}^{ik} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial a^j} + \mathrm{T}^{sk}\Gamma_{js}^i + T^{is}\Gamma_{js}^k, \tag{6}$$

где Γ_{ik}^j – символы Кристофеля.

В (5) величины T^{ik}, N^i, M^{ik} $(i,k=1,2)$ выражаются через перемещения, согласно [9], следующим образом:

$$\begin{aligned} T^{ik} &= \frac{1}{2} K E^{iksj} (e_{js} + e_{sj}), \\ M^{ik} &= \frac{1}{2} D E^{iksj} \left(\Omega_{js} + Q_{sj}\right), \\ N^i &= \frac{1-\nu}{8K(i)} (\omega^i + \gamma^i), \end{aligned} \tag{7}$$

где $$e_{ik} = \nabla_i U_k' - b_{ik} W', \qquad \Omega_{ik} = \nabla_i \gamma_k, \qquad \omega_i = \nabla_i W' + b_i^k U_k'. \tag{8}$$

Здесь $K = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}$, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $E^{ikjs} = a^{ij}a^{ks} + \nu c^{ij} c^{ks}$, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки соответственно; $K(i)$ $(i=\overline{1,3})$ – постоянные коэффициенты поперечных сдвигов и обжатия; a^{ik} – контравариантные компоненты первого метрического тензора срединной поверхности оболочки; b_{ik}, b_i^k – ковариантные и смешанные компоненты второго метрического тензора; c^{ik} – контравариантные компоненты дискриминантного тензора S [9].

Подставив (7) с учетом (8) и (6) в (5) получим конкретный вид дифференциальных операторов $L_i\left(U_1', W', \gamma_2\right)$ $(i=\overline{1,3})$. К системе уравнений (1)-(4) необходимо присоединить начальные и граничные условия.

Согласно принятому выше предположению в начальный момент система оболочка-жидкость находится в состоянии покоя. В этом случае начальные условия запишутся в следующем виде. При $t'=0$

$$U_1' = \frac{\partial U_1'}{\partial t'} = W' = \frac{\partial W'}{\partial t'} = \gamma_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial t'} = 0, \; \overrightarrow{V'} = 0, \; \rho = \rho_0, \; P = P_0. \tag{9}$$

В выражении (9) ρ_0 – плотность жидкости в состоянии покоя.

Из условия совместного движения оболочки и прилегающих к ней частиц жидкости получаем условие непроницаемости оболочки [13]:

$$\text{при } x' = 0, l: \; V_{x'}' = \frac{\partial U_{x'}'}{\partial t'}; \qquad \text{при } r' = f'(x'): \; V_n' = \frac{\partial W'}{\partial t'}. \tag{10}$$

Из условия отсутствия разрыва между жидкостью и стенкой оболочки получаем:

$$\text{при } r' = f'(x'):\ V'_{\alpha_1} = \frac{\partial U'_1}{\partial t'}. \qquad (11)$$

В (10) и (11) приняты следующие обозначения: $U'_{x'}$ – проекция вектора перемещений оболочки Ф на ось Ox'; $V'_{x'}, V'_n, V'_{\alpha_1}$ – составляющие вектора скорости частиц жидкости по координате x' направлению внешней нормали $\vec{n}$ и по направлению координаты α_1 соответственно.

В выражениях (10) и (11), как это принято в теории тонких упругих оболочек [9,14], произведен "снос" граничных условий с боковой поверхности $r' = f'(x') - \frac{h}{2}$ на срединную поверхность $r' = f'(x')$.

Граничным условием для продольного смещения оболочки является уравнение движения пластины, закрепленной на торце $x' = 0$ с учетом внешней силы, напряжения оболочки в сечении $x' = 0$ и силы давления жидкости в сечении $x' = 0$:

$$\text{при } x' = 0:\ m\frac{\partial^2 U'_{x'}}{\partial t'^2} = F(t') + F_{об}(t') + F_{ж}(t'). \qquad (12)$$

Здесь $F_{об}(t') = 2\pi f'_{(0)} h'_{x'} \sigma_{x'}(0,t'),\ F_{ж}(t') = -2\pi \int\limits_0^{f'_{(0)}} (P - P_0) r' dr'$, – масса жесткой пластины, $\sigma_{x'}(x',t')$ – проекция напряжения в оболочке на ось Ox'.

К граничным условиям (10)-(12) необходимо присоединить граничные условия, зависящие от формы оболочки и ее закрепления [15]:

$$M_n\left(U'_1, W', \gamma_2\right) = 0\ (n = 1,2,...). \qquad (13)$$

В выражении (13) $M_n\left(U'_1, W', \gamma_2\right)$ – некоторые дифференциальные операторы на граничных линиях срединной поверхности. Вид операторов $M_n\left(U'_1, W', \gamma_2\right)$ и их число определяются в каждом конкретном случае формой оболочки и характером ее закрепления в пространстве.

Выводы. Таким образом, задача об исследовании динамических процессов в системе оболочка вращения – жидкость сводится к совместному решению начально-краевой задачи (1)-(4), (9)-(13). Решение такой задачи в данной постановке представляет значительные трудности, обусловленные наличием ряда факторов, в том числе нелинейностью уравнений. Поэтому представляется возможным линеализировать задачу и применить аналитико-численные методы, позволяющие с приемлемой точностью находить решение задачи [3, 6-8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяэ Н.А. Переходные процессы деформации упругих оболочек и пластинок / Н.А.Алумяэ // Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С.883-889.
2. Мовсисян Л.А. Продольный удар по цилиндрической оболочке / Л.А.Мовсисян // Изв. АН Арм. ССР. Физ.-мат науки. – 1964. – Т.17. – №5. – С.43-46.
3. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек / У.К.Нигул // VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок: труды. – М.: Наука,1966. – С.593-599.
4. Сагомонян А.Я. Осевой удар цилиндрической оболочки о жесткую плоскость / А.Я.Сагомонян // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. –№2. – С.173-176.

5. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой / В.Д.Кубенко. – К.: Наук.думка, 1979. – 184с.
6. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости метода итераций при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2008. – Вып. 2(31). – С.240-244.
7. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости численного обращения преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. – Вып. 2(35). – С.236-240.
8. Коваленко А.П. О применимости интегрального преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании переходных процессов в цилиндрических оболочках / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – Вып. 3(39). – С.213-217.
9. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек / К.З.Галимов. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1975. – 326с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И.Седов. – М.: Наука,1976. – Т.1. – 535с.
11. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек / У.К.Нигул // VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок: труды. – М.: Наука,1966. – С.593-599.
12. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред / О.В.Голубева. – М.: Высшая школа, 1972. – 368с.
13. Ильгамов М.А. Граничные условия на поверхности контакта оболочки с жидкостью в эйлерово-лагранжевой форме / Ильгамов М.А. // X всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин, Кутаиси,1975г.: труды. – Тбилиси: Мецниераба, 1975. – С.170-180.
14. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны / Л.И.Слепян. – Л.: Судостроение, 1972. – 374с.
15. Григолюк Э.И. Механика твердых деформируемых тел / Э.И.Григолюк, И.Т.Селезов // Т.5. – М.: ВИНИТИ, 1973. – 272с.

Поступила в редколлегию 19.06.2015.

УДК 539.3

КИРИЛЮК В.С., д.физ.-мат.н., вед. науч. сотр.
ЛЕВЧУК О.И., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКОЙ ОСНОВОЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВЫЕМКУ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ, ПРИ СЖАТИИ

Введение. Широкое применение пьезоэлектрических материалов, которые отличаются значительной хрупкостью, стимулирует интерес к изучению и анализу распределений силовых и электрических полей в электроупругих телах вблизи концентраторов напряжений [1-6]. В то же время, рассмотрение пространственных задач электроупругости сопряжено со значительными математическими трудностями, поскольку исходная система уравнений для определения электрического и напряженного состояний представляет собой связанную систему дифференциальных уравнений [4]. Решению контактных задач для электроупругих тел с учетом связанности силовых и электрических полей посвящены работы [4-6] и др.