5. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой / В.Д.Кубенко. – К.: Наук.думка, 1979. – 184с.
6. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости метода итераций при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2008. – Вып. 2(31). – С.240-244.
7. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости численного обращения преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. – Вып. 2(35). – С.236-240.
8. Коваленко А.П. О применимости интегрального преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании переходных процессов в цилиндрических оболочках / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – Вып. 3(39). – С.213-217.
9. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек / К.З.Галимов. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1975. – 326с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И.Седов. – М.: Наука,1976. – Т.1. – 535с.
11. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек / У.К.Нигул // VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок: труды. – М.: Наука,1966. – С.593-599.
12. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред / О.В.Голубева. – М.: Высшая школа, 1972. – 368с.
13. Ильгамов М.А. Граничные условия на поверхности контакта оболочки с жидкостью в эйлерово-лагранжевой форме / Ильгамов М.А. // X всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин, Кутаиси,1975г.: труды. – Тбилиси: Мецниераба, 1975. – С.170-180.
14. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны / Л.И.Слепян. – Л.: Судостроение, 1972. – 374с.
15. Григолюк Э.И. Механика твердых деформируемых тел / Э.И.Григолюк, И.Т.Селезов // Т.5. – М.: ВИНИТИ, 1973. – 272с.

Поступила в редколлегию 19.06.2015.

УДК 539.3

КИРИЛЮК В.С., д.физ.-мат.н., вед. науч. сотр.
ЛЕВЧУК О.И., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКОЙ ОСНОВОЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВЫЕМКУ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ, ПРИ СЖАТИИ

Введение. Широкое применение пьезоэлектрических материалов, которые отличаются значительной хрупкостью, стимулирует интерес к изучению и анализу распределений силовых и электрических полей в электроупругих телах вблизи концентраторов напряжений [1-6]. В то же время, рассмотрение пространственных задач электроупругости сопряжено со значительными математическими трудностями, поскольку исходная система уравнений для определения электрического и напряженного состояний представляет собой связанную систему дифференциальных уравнений [4]. Решению контактных задач для электроупругих тел с учетом связанности силовых и электрических полей посвящены работы [4-6] и др.

В настоящей работе исследовано контактное взаимодействие (при условиях гладкого контакта) пьезоэлектрического полупространства с жесткой основой, содержащей осесимметричную пологую выемку, при сжатии тел. Задача электроупругости рассмотрена в предположении, что поверхность раздела двух тел расположена в плоскости изотропии пьезоэлектрического материала. С помощью гармонических потенциалов, зависящих от величины зазора между телами при контакте, получено точное решение задачи, найдены геометрические размеры выемки в результате контактного взаимодействия. Как частные случаи из полученного решения задачи электроупругости следуют соответствующие параметры контакта для упругого трансверсально-изотропного полупространства, а также для упругого изотропного тела [7].

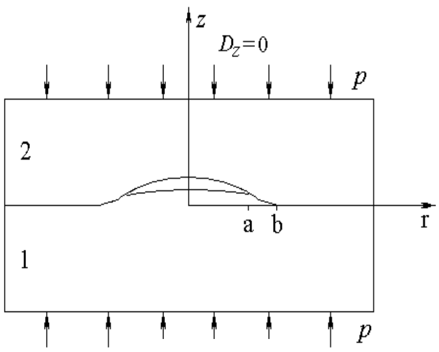

Рисунок 1

Постановка задачи. Рассмотрим контактное взаимодействие при сжатии электроупругого трансверсально-изотропного полупространства (тело 1) с жесткой основой (тело 2) (рис.1), что содержит пологую осесимметричную выемку, форма которой описывается выражением

$$f(r) = h_0(1 - r^2 / b^2)^{3/2},\ r \le b,\ (h_0 << b). \quad (1)$$

Предполагается, что плоскость контакта расположена в плоскости изотропии пьезоэлектрического материала, и поверхность полупространства является неэлектродированной (не содержит электродного покрытия). Полагается также, что к телам приложены сжимающие усилия p и между телами имеет место гладкий (без трения) контакт. Поскольку в жестком теле содержится выемка, то контакт осуществляется не по всей поверхности $z = 0$, а по некоторой ее части $r > a$, где a – неизвестный радиус области контакта (рис.1), который зависит от значений усилий p, геометрии первоначальной выемки, свойств электроупругого полупространства. Дополнив функцию $f(r)$ нулевым значением в области $r > b$, получим

$$f(r) = \begin{cases} h_0(1 - r^2 / b^2)^{3/2},\ r \le b; \\ 0,\ r > b. \end{cases} \quad (2)$$

Воспользовавшись суперпозицией состояний, первое из которых – сжатие вдоль оси $0z$, т.е. $\sigma_{zz} = -p$, $D_z = 0$, для второго електроупругого получаем следующие граничные условия в плоскости $z = 0$:

$$\sigma_{zz} = 0,\ 0 < r < a;\ u_z^{(1)} = f(r),\ a < r < \infty;$$

$$\sigma_{zr} = 0,\ 0 < r < \infty;\ \sigma_{zz} = p,\ a < r < \infty;$$

$$D_z = 0,\ 0 < r < \infty, \quad (3)$$

Отметим, что последнее граничное условие по электрическому состоянию соответствует случаю неэлектродированной поверхности полупространства. Также при удалении от области контакта имеют место условия на бесконечности

$$\sigma_{zz} \to -p,\ D_z \to 0,\ \sigma_{zr} \to 0 \text{ при } z \to -\infty. \quad (4)$$

Основные соотношения. Уравнения статики для электроупругого трансверсально-изотропного тела имеют вид [4]

$$c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E)u_{y,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E)u_{z,xz} +$$
$$+ (e_{31} + e_{15})\Psi_{,xz} = 0;$$
$$c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E)u_{x,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E)u_{z,yz} +$$
$$+ (e_{31} + e_{15})\Psi_{,yz} = 0;$$
$$(c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} +$$
$$+ e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33}\Psi_{,zz} = 0. \qquad (5)$$

В приведенных уравнениях $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ – независимые модули упругости; e_{31}, e_{15}, e_{33} – пьезомодули; $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$ – диэлектрические проницаемости.

Решение системы уравнений (5) можно согласно [4] выразить через четыре потенциальные функции Φ_j $(j = \overline{1,4})$

$$u_x = \sum_{j=1}^{3}\Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \; u_y = \sum_{j=1}^{3}\Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \; u_z = \sum_{j=1}^{3}k_j\Phi_{j,z}; \; \Psi = \sum_{j=1}^{3}l_j\Phi_{j,z}, \qquad (6)$$

где k_j, l_j – некоторые постоянные, а функции Φ_j удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j\Phi_{j,zz} = 0 \; (j = 1, 2, 3), \qquad (7)$$

где $\nu_4 = 2c_{44}^E / \left(c_{11}^E - c_{12}^E\right)$, значения ν_i $(i = 1, 2, 3)$ являются корнями следующего алгебраического уравнения третьего порядка [4]:

$$\nu^3(A_1B_2 - C_1D_2) + \nu^2(A_1B_3 + A_2B_2 - C_1D_3 - C_2D_2) +$$
$$+ \nu(A_2B_3 + A_3B_2 - C_2D_3 - C_3D_2) + A_3B_3 - C_3D_3 = 0. \qquad (8)$$

Значения k_j, l_j $(j = 1, 2, 3)$ в формулах (6) связаны с величинами ν_j следующими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31}l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33}l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j \; (j = 1, 2, 3), \qquad (9)$$

$$a_j = c_{44}^E(1 + k_j) + e_{15}l_j; \; d_j = e_{15}(1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \; (j = 1, 2, 3, 4). \qquad (10)$$

При введении обозначений $z_j = zn_j^{-1/2}$ $(j = \overline{1,4})$ функции $\Phi_1(x, y, z_1)$, $\Phi_2(x, y, z_2)$, $\Phi_3(x, y, z_3)$, $\Phi_4(x, y, z_4)$ становятся гармоническими функциями в соответствующих системах координат.

Метод решения. При построении решения граничной задачи электроупругости воспользуемся представлением решений (6). При этом потенциальные функции возьмем в виде гармонических потенциалов специального вида

$$\Phi_i(x,y,z_i) = -\frac{\alpha_i^*}{2\pi}\left(\iint\limits_{S_1}\frac{-h(\vec{\xi})d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+z_i^2}} + \iint\limits_{S_0}\frac{r(\vec{\xi})d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+z_i^2}}\right), \quad (11)$$

где $h(\xi_1,\xi_2) = h_1(1-\xi_1{}^2/a^2-\xi_2{}^2/a^2)^{3/2}$, $r(\xi_1,\xi_2) = h_0(1-\xi_1{}^2/b^2-\xi_2{}^2/b^2)^{3/2}$, S_1 и S_0 – круговые площадки радиусов a и b соответственно (рис.1). Также положим $\Phi_4^{(2)} = 0$. Постоянные α_i^*, входящие в (11), определим из системы трех линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\left(c_{44}^E\left(1+k_j\right)+e_{15}l_j\right)=1;\ \sum_{j=1}^{3}\alpha_j\left(c_{44}^E\left(1+k_j\right)+e_{15}l_j\right)/\sqrt{\nu_j}=0;$$

$$\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\left(e_{15}\left(1+k_j\right)-\varepsilon_{11}^S l_j\right)=0. \quad (12)$$

Пока неизвестными остаются такие параметры: a – значения радиуса площадки контакта (рис. 1); h_1 – максимальная высота зазора в результате контактного взаимодействия. Их значения определим из решения контактной задачи.

Заметим, что идея применения потенциалов вида (11), что связаны с величиной контактного зазора, близка приему использования скачков перемещений для трещины нормального отрыва для описания напряженного состояния в ее окрестности. Принципиальное отличие заключается в том, что поверхность трещины задана, а площадка контакта S_1 и ее радиус a – заранее не известны и определяются в процессе решения задачи. Для контактных задач в упругом изотропном теле это указано в [8].

С помощью потенциальных функций (11), учитывая (12) и удовлетворяя граничным условиям задачи, приходим к решению интегро-дифференциального уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint\limits_{S_1}\frac{h(\vec{\xi})d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+z_i^2}} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint\limits_{S_0}\frac{r(\vec{\xi})d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+z_i^2}} + 2\pi M^*,$$

$$(x,y)\in S_1. \quad (13)$$

Значение $M^* = \sum\limits_{j=1}^{3}\alpha_j^* k_j/\sqrt{\nu_j}$.

После дифференцирования воспользуемся значениями следующих интегралов [9]:

$$\iint\limits_{S}\frac{\sqrt{1-\xi_1^2/a^2-\xi_2^2/a^2}}{\left[(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2\right]^{3/2}}d_\xi S = -\frac{\pi^2}{a};$$

$$\iint\limits_{S}\frac{\xi_1^2\sqrt{1-\xi_1^2/a^2-\xi_2^2/a^2}}{\left[(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2\right]^{3/2}}d_\xi S = \frac{\pi^2}{16a}\left(4a^2-33x^2-3y^2\right);$$

$$\iint\limits_S \frac{\xi_2^2 \sqrt{1-\xi_1^2/a^2-\xi_2^2/a^2}}{\left[(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2\right]^{3/2}} d_\xi S = \frac{\pi^2}{16a}\left(4a^2-3x^2-33y^2\right).$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях декартовых координат, получаем

$$a = b\sqrt{1-\frac{4pbM^*}{3\pi h_0}}\ ;\ h_1 = h_0\left(1-\frac{4pbM^*}{3\pi h_0}\right)^{3/2}. \tag{14}$$

Из формул (14) по известным размерам первоначальной выемки (параметры b и h_0), значению сжимающих усилий p, девяти независимых значениях электроупругих постоянных (входят через значение M^*) находим значение радиуса контакта a и максимальную высоту зазора (после контактного взаимодействия) h_1. Также, приравняв значение a к нулю, находим критическое значение нагрузки $p^* = \frac{3\pi h_0}{4bM^*}$, при которой выемка в жестком теле полностью заполняется электроупругим материалом.

При переходе к чисто упругому трансверсально - изотропному материалу имеем $M^* \to M^{Trans} = \frac{c_{11}}{c_{44}}\frac{(n_1^{1/2}+n_2^{1/2})(c_{13}+c_{44})}{(c_{11}n_1+c_{13})(c_{11}n_2+c_{13})}$, где n_1, n_2 – корни квадратного уравнения $c_{11}c_{44}n^2-\left[c_{44}^2+c_{33}c_{11}-(c_{13}+c_{44})^2\right]n+c_{33}c_{44}=0$, которые зависят от упругих свойств материала. Заменив в выражениях (14) значение M^* величиной M^{Trans}, получаем параметры контакта чисто упругого трансверсально-изотропного полупространства с жесткой основой (с выемкой). Дальнейший предельный переход к упругому изотропному материалу приводит $M^{Trans} \to (1-\nu)/\mu$. При взаимодействии упругого изотропного полупространства с жесткой основой, содержащей осесимметричную выемку (частный случая рассмотренной контактной задачи), заменив в формулах (14) величину M^* значением $(1-\nu)/\mu$, приходим к полному совпадению результатов с данными [7], найденными с помощью сведения контактной задачи к решению парных интегральных уравнений.

Выводы. Таким образом, в работе на основе использования гармонических потенциалов специального вида найдено точное решение задачи контактного взаимодействия электроупругого полупространства с жесткой основой, содержащей осесимметричную выемку, при сжатии. В явном виде получены геометрические параметры зазора, образовавшегося в результате контакта, определено критическое значение сжатия, при котором выемка полностью исчезает (заполняется материалом).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen W.Q. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium / Chen W.Q, Lim C.W. // Int. J. Fract. – 2005. – **131**. – N 3. – P.231-246.
2. Kaloerov S.A. Determination of intensity factors for stresses, induction and field strength in multi-connected electro-elastic anisotropic media / Kaloerov S.A. // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, № 6. – P.77-84.

3. Li X.F. Three-Dimensional Electroelastic Analysis of a Piezoelastic Analysis of a Piezoelectric Material With a Penny–Shaped Dielectric Crack / Li X.F., Lee K.Y. // J. Appl. Mech. – 2004. – **71**, N 6. – P.866-877.
4. Podil'chuk Yu.N. Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems / Podil'chuk Yu.N. // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, № 2. – P.132-170.
5. Кирилюк В.С. О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством / Кирилюк В.С. // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып.46. – С.29-35.
6. Кирилюк В.С. Трехмерная контактная задача для двух пьезокерамических тел с учетом тепловыделения / Кирилюк В.С., Левчук О.И. // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – Вып. 3(**49**). – С.28-37.
7. Монастирський Б.Є. Осесиметрична контактна задача для півпросторів з геометричним збуренням поверхні / Б.Є.Монастирський // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1999. –№ 6. – С.22-26.
8. Кіт Г.С. Просторові контактні задачі для пружного півпростору і жорсткої основи з поверхневими виїмками / Кіт Г.С., Мартиняк Р.М. // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1999. – **42**, № 6. – С.7-11.
9. Хай М.В. Двумерные интегральные уравнения ньютоновского потенциала и их приложения / М.В.Хай. – К.: Наук. думка, 1993. – 256с.

Поступила в редколлегию 23.06.2015.

УДК 539.3

КИРИЛЮК В.С., д.физ.-мат.н., вед. науч. сотр.
ЛЕВЧУК О.И., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

СТАТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА С ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И ИЗГИБЕ

Введение. Пространственные задачи механики разрушения для упругих изотропных тел с дискообразными или эллиптическими трещинами изучались в работах [1-3] и др., а для трансверсально-изотропных тел с трещинами – в [4, 5]. Отметим, что при рассмотрении задач для трансверсально-изотропных материалов, в основном, предполагалось, что плоские трещины расположены в плоскостях изотропии трансверсально-изотропного материала. Такое ограничение на ориентацию плоских трещин существенно упрощает нахождение решений задач с помощью представлений решений уравнений статики трансверсально-изотропного тел посредством гармонических функций. Однако, для других ориентаций плоских трещин в трансверсально-изотропном материале, как и для случая упругого ортотропного материала с трещиной, задачи механики разрушения существенно усложняются. Возникающие при этом трудности математического характера не позволяют использовать методы и подходы, успешно применяемые при специальной ориентации плоских трещин (в плоскостях изотропии материала).

Задачи механики разрушения для трещин круговой или эллиптической формы в ортотропных телах, расположенных в главных плоскостях ортотропии материала, исследованы в [6, 7] с помощью применения тройного преобразования Фурье, Фурье-