

8. Кирилук В.С. Напряженное состояние упругого ортотропного тела с эллиптической трещиной под внутренним давлением (с учетом ориентации трещины) / Кирилук В.С., Левчук О.И. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки). – 2014. – Вип. 1(24). – С.200-204.
9. Willis L.J. The stress field around an elliptical crack in an anisotropic medium / Willis L.J. // Int.J. Eng. Sci. – 1968. – V.6, № 5. – P.253-263.
10. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / Лехницкий С.Г.– М.: Наука, 1977. – 415с.

Поступила в редколлегию 23.06.2015.

УДК 539.3

БАЩУК Е.Ю., к.физ.-мат.н., доцент  
БОЙЧУК В.Ю., ассистент

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТИНЫ В ПРЕДЕЛАХ ТОЧНОЙ ПОСТАНОВКИ И БАЛОЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

**Введение.** При исследовании материалов и элементов конструкций с трещинами достаточно широкое распространение получили приближенные расчетные схемы и модели. Одним из распространенных подходов является балочный подход или балочное приближение. По-видимому, впервые балочный подход был предложен в [10]. В последние годы балочный подход применялся в многочисленных статьях при исследовании и более сложных задач, к таким ситуациям можно отнести, например, [1-3,6, 8] и ряд других публикаций.

Согласно этому подходу, область окрестности трещины заменяется областью, имеющей форму стержня (балки), длина которой принимается равной длине трещины, а ширина выбирается из физических соображений. Например, в случае приповерхностной трещины или трещине, находящейся в полосе, ширина балки выбирается равной расстоянию от трещины до поверхности. При этом граничные условия на концах стержня выбираются по-разному, и очевидно являются сугубо приближенными. Таким образом, при балочном подходе имеется два типа неустранимых погрешностей: погрешность, появляющаяся вследствие уменьшения размерности задачи, и погрешность, обусловленная невозможностью корректной формулировки граничных условий. Единственным подходом, позволяющим получить точные значения критических параметров в задачах устойчивости материалов и элементов конструкций с трещинами, является точный подход.

В данной работе рассматривается плоская задача устойчивости жестко закрепленной пластины с центральной трещиной. Для изотропной пластины получены зависимости критических параметров от длины трещины с применением точного и приближенного подходов.

**Постановка задачи.** Рассматривается прямоугольная изотропная пластина, механические характеристики которой соответствуют строительной стали [9]:  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $G = 77 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $0,125 \leq \alpha \leq 0,3$ , где  $E$  и  $\nu$  – технические постоянные,  $\alpha = l_1/l_2$  – параметр тонкостенности. Пластина достаточно протяженная в направлении  $0x_3$  и имеет в этом направлении сквозную трещину длины  $2t$ . Вдоль оси  $0x_2$  (в направлении трещины) пластина сжимается нагрузкой постоянной интенсивности  $\overset{\circ}{p}_{22}$ , обес-

печивающей в теле пластины состояние плоской деформации в плоскости  $x_1 0 x_2$ , где пластина имеет размеры  $2l_1 \times 2l_2$  (рис.1, а). К решению задачи устойчивости применяются уравнения ТЛТУДТ и используется второй вариант теории [4]. Для решения задачи уравнений ТЛТУДТ необходимо предварительно найти решение соответствующей задачи линейной теории упругости, из которой определяются начальные напряжения  $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$  в теле пластины с трещиной. Сформулируем задачу упругости.

*Постановка задачи упругости.*

Отыскивается функция  $\overset{\circ}{u} = (\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2)$ , удовлетворяющая следующие соотношения:

уравнение равновесия

$$-\frac{\partial \overset{\circ}{\sigma}_{im}}{\partial x_i} = \overset{\circ}{F}_m; \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1)$$

граничные условия

$$\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0; \quad |x_1| = l_1 \wedge |x_2| \leq l_2; \quad (2)$$

$$\overset{\circ}{u}_i = 0 \wedge \overset{\circ}{u}_2 = const; \quad |x_1| \leq l_1 \wedge |x_2| = l_2,$$

условия на трещине

$$\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0; \quad x_1 = \pm 0 \wedge |x_2| \leq t. \quad (3)$$

Закон Гука для изотропного тела имеет вид:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ii} = A_{im} \overset{\circ}{\varepsilon}_{mm}; \quad \overset{\circ}{\sigma}_{12} = 2G \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \quad A_{ii} = \lambda + 2G; \quad A_{12} = \lambda; \quad (4)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overset{\circ}{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_j}{\partial x_i} \right); \quad \lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где  $\bar{\Omega}$  – расчетная область;  $\overset{\circ}{F}_m$  – компонента массовой силы;  $x = (x_1, x_2)$  – точка на расчетной схеме;  $A_{ij}$  – упругие постоянные (коэффициенты жесткости);  $G$  – модуль сдвига,  $\lambda$  – коэффициент Ламе. В (3)  $x = -0$  соответствует левому берегу трещины.

*Постановка задачи устойчивости.*

Для нахождения критических параметров требуется определить минимальное по модулю и отличное от нуля собственное решение  $(\overset{*}{p}, \overset{*}{u})$  спектральной задачи, удовлетворяющей следующим соотношениям:

уравнения в возмущениях

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{im} + p \overset{\circ}{\sigma}_{im} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (5)$$

граничные условия

$$\sigma_{1m} = 0; \quad |x_1| = l_1 \wedge |x_2| \leq l_2; \quad (6)$$

$$u_1 = 0 \wedge u_2 = const; \quad |x_1| \leq l_1 \wedge |x_2| = l_2;$$

условия на сторонах трещины

$$\sigma_{1m} = 0; \quad x_1 = \pm 0 \wedge |x_2| \leq t. \quad (7)$$

Закон Гука определяется соотношением (4), где следует опустить индекс 'о'.

Критические параметры определяются из равенства

$$p^{kp} = \overset{*}{p} = p_1; \quad u^{kp} = \overset{*}{u} = u_1. \quad (8)$$

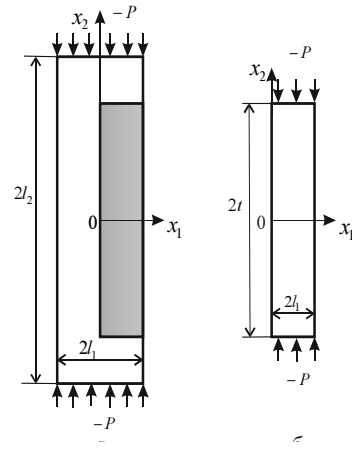


Рисунок 1 – Расчетная схема

К приближенному решению задач (1)-(8) применяется сеточный подход. Разностная схема строится вариационно-разностным методом, в которой использована концепция базовой схемы [5]. Решения сеточных уравнений используются с применением метода итерирования подпространств [7] и градиентного спуска [5].

В результате расчетов получены значения критической нагрузки, а также вычислена нагрузка по формуле Эйлера, при  $\alpha = 0,125$  и  $t = 0$ .  $P^{жс}_{кр} = 9,096$ ,  $P^э_{кр} = 8,33$ . То есть эйлерова нагрузка дает заниженные результаты. Также очевидно, что с увеличением трещины, нагрузка уменьшается.

$$t = 0,3, P^{жс}_{кр} = 8,785.$$

**Результаты работы.** На рис.2 приведены формы потери устойчивости компоненты  $u_1(x_1 = const, x_2)$  в сечениях  $|x_1| = 0$  (кривая 1),  $|x_1| = l_1$  (кривая 2) для значения параметра трещины  $t \leq 0,3$ .

При увеличении трещины  $t > 0,3$  имеет место взаимодействие берегов трещины (рис.3) и чем толще пластина, тем сильнее влияние трещины.

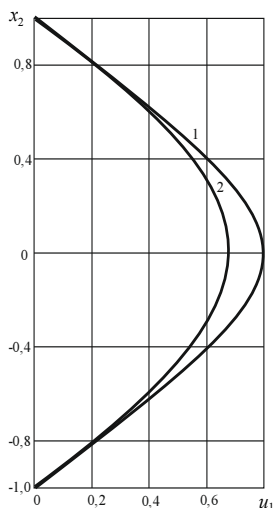


Рисунок 2 – Формы потери устойчивости пластины

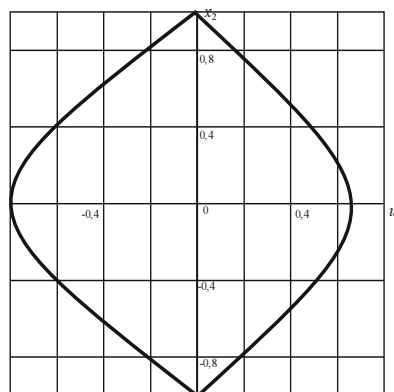


Рисунок 3 – Раскрытие трещины

**Выводы.** Сравнение характера форм потери устойчивости, соответствующих точному и приближенному подходов, показывает, что балочная функция  $u_1^t(x_2) = \cos(0,5\pi x_2/t)$  не совпадает ни с одной из форм устойчивости в сечении  $x_1 = const$  (функции  $u_1 \approx A(x_1)\cos(\pi x_2/2)$ ), соответствующей точному подходу. Качественное отличие этих форм заключается в том, что период функции  $u_1^t(x_2)$  увеличивается с ростом величины  $t$  трещины и функция  $u_1^t$ , конечно же, не зависит от координаты  $x_1$ . Точная форма потери устойчивости в сечении  $x_1 = const$  (функция  $u_1$ ) характеризуется тем, что период функции  $u_1(x)$  не зависит от параметра  $t$  и, кроме того, амплитуда  $A(x_1)$  функции  $u_1(x)$  зависит от величины сечения  $x_1$  (рис.2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Расчет композитных конструкций с учетом расслоения / [Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Оглобля А.Н. и др.]. – К.: Будівельник, 1992. – 136с.
2. Болотин В.В. Механика расслоения в конструкциях из слоистых композитов / Болотин В.В. // Механика композитных материалов. – 2001. – 37, № 5. – С.585-602.

3. Колебания ребристых оболочек вращения / под ред. И.Я.Амиро. – К.: Наук. думка, 1988. – 172с.
4. Болотин В.В. Устойчивость сжатых элементов с дефектами типа расслоения / Болотин В.В., Забельян З.Х., Курзин А.А. // Проблемы прочности. – 1980. – № 7. – С.3-8.
5. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел / Гузь А.Н. – К.: Наук. думка, 1971. – 276с.
6. Коханенко Ю.В. Численное исследование задач трехмерной устойчивости композитов слоистой и ленточной структуры / Коханенко Ю.В. // Прикладная механика. – 2001. – 37, № 3. – С.35-64.
7. Михайлов А.Н. Обобщение балочного подхода к задачам теории трещин / Михайлов А.Н. // Прикладная математика и техническая физика. – 1969. – № 3. – С.171-174.
8. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Парлет Б.; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 382с.
9. Слепьян Л.И. Механика трещин / Слепьян Л.И. – Л.: Судостроение, 1990. – 296с.
10. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов / Тимошенко С.П. – М.: Физматгиз, 1960. – 380с.
11. Obreimoff L.W. The splitting strength of mica / Obreimoff L.W. // Proc. Roy. Soc. London. – 1930. – 127 A. – P.290-297.

Поступила в редколлегию 26.06.2015.

УДК 519.2

ВАЦІЛІНА О.В., к.физ.-мат.н., доцент

Національний транспортний університет

### ПОБУДОВА ТАБЛИЦІ З КОМБІНАЦІЙ НА ОСНОВІ ТРИКУТНИКА ПАСКАЛЯ

**Вступ.** З курсу математики (комбінаторики) відомо, що будь-яка  $k$ -елементна підмножина даної  $n$ -елементної множини називається *комбінацією (сполученням)* з  $n$  елементів по  $k$  елементів. Число різних таких комбінацій позначається  $C_n^k$  і обчислюється за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad (0 \leq k \leq n). \quad (1)$$

Властивості числа комбінацій:

$$\begin{aligned} 1) \quad C_n^0 = C_n^n = 1; \quad 2) \quad C_n^1 = n; \quad 3) \quad C_n^k = C_n^{n-k}; \quad 4) \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k; \\ 5) \quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n. \end{aligned} \quad (2)$$

Окрім того, що комбінації являються коефіцієнтами розкладу бінома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

вони також часто зустрічаються при розв'язуванні багатьох задач комбінаторики та теорії ймовірності [1]. Наприклад:

- Задачі комбінаторики.

Скількома способами можна обрати двох студентів для чергування із групи чисельністю 20 студентів?

*Розв'язування.*

Кількість шуканих способів  $n$  дорівнює кількості комбінацій із 20 елементів по 2, тобто:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190.$$