3. Колебания ребристых оболочек вращения / под ред. И.Я.Амиро. – К.: Наук. думка, 1988. – 172с.
4. Болотин В.В. Устойчивость сжатых элементов с дефектами типа расслоения / Болотин В.В., Забельян З.Х., Курзин А.А. // Проблемы прочности. – 1980. – **№ 7**. – С.3-8.
5. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел / Гузь А.Н. – К.: Наук. думка, 1971. – 276с.
6. Коханенко Ю.В. Численное исследование задач трехмерной устойчивости композитов слоистой и ленточной структуры / Коханенко Ю.В. // Прикладная механика. – 2001. – **37,** № 3. – С.35-64.
7. Михайлов А.Н. Обобщение балочного подхода к задачам теории трещин / Михайлов А.Н. // Прикладная математика и техническая физика. – 1969. – **№ 3**. – С.171-174.
8. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Парлет Б.; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 382с.
9. Слепян Л.И. Механика трещин / Слепян Л.И. – Л.: Судостроение,1990. – 296с.
10. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов / Тимошенко С.П. – М.: Физматгиз, 1960. – 380с.
11. Obreimoff L.W. The splitting strength of mica / Obreimoff L.W. // Proc. Roy. Soc. London. – 1930. – **127** A. – P.290-297.

Поступила в редколлегию 26.06.2015.

УДК 519.2

ВАЩІЛІНА О.В., к.физ.-мат.н., доцент

Національний транспортний університет

ПОБУДОВА ТАБЛИЦІ З КОМБІНАЦІЙ НА ОСНОВІ ТРИКУТНИКА ПАСКАЛЯ

Вступ. З курсу математики (комбінаторики) відомо, що будь-яка k-елементна підмножина даної n-елементної множини називається *комбінацією(сполученням) з n елементів по k елементів.* Число різних таких комбінацій позначається C_n^k і обчислюється за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}, \quad (0 \le \kappa \le n)\,. \tag{1}$$

Властивості числа комбінацій:

$$\begin{gathered} 1)\quad C_n^0 = C_n^n = 1;\quad 2)\quad C_n^1 = n;\quad 3)\quad C_n^k = C_n^{n-k};\quad 4)\quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k; \\ 5)\quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n. \end{gathered} \tag{2}$$

Окрім того, що комбінації являються коефіцієнтами розкладу бінома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

вони також часто зустрічаються при розв'язуванні багатьох задач комбінаторики та теорії ймовірності [1]. Наприклад:

- Задачі комбінаторики.

Скількома способами можна обрати двох студентів для чергування із групи чисельністю 20 студентів?

Розв'язування.

Кількість шуканих способів n дорівнює кількості комбінацій із 20 елементів по 2, тобто:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190\,.$$

Отже, існує 190 різних пар студентів, яких можна обрати з 20 студентів.

- Ймовірність настання події А k разів у n повторних незалежних випробуваннях (формула Бернуллі)

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де p – ймовірність настання події А в одному випробуванні, $q=1-p$.

Оптовий магазин запчастин для авто постачає запчастини 10 СТО, від кожної з яких може надійти заявка на наступний день з ймовірністю 0,4, незалежно від заявок інших СТО. Знайдіть:

а) найвірогідніше число k заявок, що надійдуть наступного дня;

б) ймовірність отримання магазином такого числа (k) заявок.

Розв'язування.

Маємо схему Бернуллі. Подія А («успіх») – «отримання заявки». Ймовірність «успіху»: $p = P(A) = 0{,}4$ – за умовою. Тоді ймовірність протилежної події $\overline{A}$ («невдачі»): $q = P(\overline{A}) = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Кількість випробувань $n = 10$:

а) оцінимо значення виразу: $(n+1)p = (10+1) \cdot 0{,}4 = 4{,}4$.

Оскільки отримане число дробове, то найвірогідніше число заявок k в день шукаємо як цілу частину цього числа: $k = [4{,}4] = 4$;

б) ймовірність отримання чотирьох заявок із десяти обчислимо за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k};$$

$$P_{10}(4) = C_{10}^4 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^6 = \frac{10!}{4!6!} \cdot 0{,}0256 \cdot 0{,}467 = 210 \cdot 0{,}01156 \approx 0{,}251.$$

Отже, шукана ймовірність отримання най вірогіднішого числа заявок близько 0,251.

- Гіпергеометричний розподіл дискретної випадкової величини.

Гіпергеометричний розподіл виникає, наприклад, у випробуваннях, коли з комплекту, що складається з N предметів, n з яких мають певну властивість (нестандартні, пофарбовані, тощо), відбирається навмання m предметів (одноразово, або послідовно без повернення до комплекту), а випадкова величина X – кількість предметів із зазначеною властивістю серед відібраних. У загальному випадку X набуває значень $0, 1, 2, \ldots, m$ з ймовірностями

$$P(X = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

Постановка задачі. Спираючись на властивості комбінацій (2), починаючи з верхнього рядка, будемо будувати числовий трикутник (рис.1). Згідно з властивістю 1) комбінацій його бокові сторони складаються з одиниць. Згідно з властивістю 4) кожне число дорівнює сумі двох чисел, що знаходяться над ним. Контролюємо правильність побудови за властивістю 3) - числа трикутника мають бути симетричними (рівними) відносно вертикальної осі, що проходить через вершину трикутника. Побудову можна продовжувати нескінченно…

Отриманий числовий трикутник називають в європейських країнах трикутником Паскаля на честь Блеза Паскаля, який описав його дивовижні властивості в роботі "Трактат про арифметичний трикутник" (1653 рік). Трикутник, описаний у роботі Б.Паскаля, відрізняється від наведеного на рис.1 поворотом на 45 градусів. Однак, Паскаль не перший помітив трикутну закономірність біноміальних коефіцієнтів. Згадки про цей трикутник зустрічаються у роботах прадавніх математиків і філософів Пінгали, Омара Хайяма та ін. [2, 3].

Таблиця 1. Трикутник Паскаля значень комбінацій $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_n^k = C_n^{n-k}$

k або (n-k) / n	1(29)	2(28)	3(27)	4(26)	5(25)	6(24)	7(23)	8(22)	9(21)	10(20)	11(19)	12(18)	13(17)	14(16)	15
1	1														
2	2	1													
3	3	3	1												
4	4	6	4	1											
5	5	10	10	5	1										
6	6	15	20	15	6	1									
7	7	21	35	35	21	7	1								
8	8	28	56	70	56	28	8	1							
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
11	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
12	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
13	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
14	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
15	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1
16	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16
17	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136
18	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816
19	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876
20	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970	77520	38760	15504
21	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930	352716	352716	293930	203490	116280	54264
22	22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770	497420	646646	705432	646646	497420	319770	170544
23	23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314	817190	1144066	1352078	1352078	1144066	817190	490314
24	24	276	2024	10626	42504	134596	346104	735471	1307504	1961256	2496144	2704156	2496144	1961256	1307504
25	25	300	2300	12650	53130	177100	480700	1081575	2042975	3268760	4457400	5200300	5200300	4457400	3268760
26	26	325	2600	14950	65780	230230	657800	1562275	3124550	5311735	7726160	9657700	10400600	9657700	7726160
27	27	351	2925	17550	80730	296010	888030	2220075	4686825	8436285	13037895	17383860	20058300	20058300	17383860
28	28	378	3276	20475	98280	376740	1184040	3108105	6906900	13123110	21474180	30421755	37442160	40116600	37442160
29	29	406	3654	23751	118755	475020	1560780	4292145	10015005	20030010	34597290	51895935	67863915	77558760	77558760
30	30	435	4060	27405	142506	593775	2035800	5852925	14307150	30045015	54627300	86493225	119759850	145422675	155117520

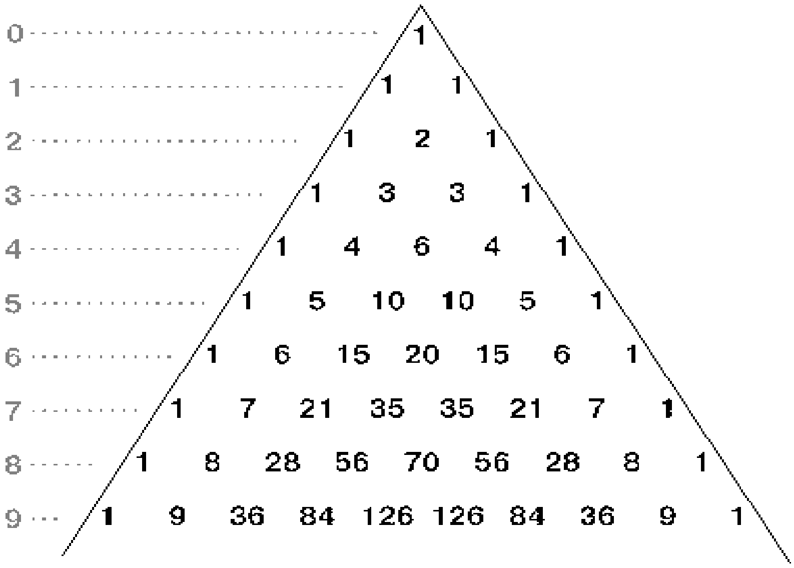

Рисунок 1

Результати роботи. Випишемо трикутник Паскаля у вигляді таблиці, де по вертикалі розмістимо значення n, а по горизонталі k або в дужках (n-$к$), значення комбінацій при яких рівні, внаслідок симетрії трикутника (табл.1). Таблиця побудована за допомогою прикладної програми Microsoft Excel і дозволяє знаходити комбінації C_n^k до n=30.

Висновки. Як зазначалося вище, необхідність обчислювати комбінації виникає в багатьох задачах математики і вже при $n > 6$ їх обчислення потребує певних зусиль і затрат часу. Тому пропонується застосовувати для їх знаходження трикутник Паскаля, виписаний у вигляді таблиці. У даній роботі побудовано таку таблицю до n=30 , що є зручним при знаходженні конкретної комбінації. Отриманий результат пропонується застосовувати у вигляді додатку до підручників з комбінаторики та теорії ймовірності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / Гмурман В.Е. – М.: Высшая школа, 2001. – 400с.
2. Вікіпедія. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://uk.wikipedia.org/wiki/Трикутник_Паскаля.
3. Арбуз. Удивительный треугольник великого француза [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://http://arbuz.uz/u_treug.html.

Надійшла до редколегії 22.05.2015.

УДК 539.3

АНДРУСЕНКО Е.Н., к.т.н., науч. сотр.

Национальный транспортный университет

НЕЛИНЕЙНОЕ ИЗГИБАНИЕ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ В СВЕРХГЛУБОКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СКВАЖИНЕ

Введение. Одно из основных препятствий глубокого бурения связано с возможностью появления нештатных ситуаций, вызванных критическими состояниями квазистатического равновесия бурильной колонны (БК), её изгибным выпучиванием, контактным взаимодействием со стенкой скважины и её так называемым “прихватыванием”. При этом возникает две проблемы исследования механики упругого изгибания БК. Первая проблема заключается в определении критического состояния колонны, которая формулируется как задача эйлеровой потери устойчивости длинного вращающегося трубчатого стержня, преднапряжённого переменной по длине продольной силой, вы-