тами прихвата. Рассмотрены случаи эллиптических, гиперболических, параболических проектных траекторий скважины при выполнении операций спуска и подъема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Paslay P.R. The stability of a circular rod laterally constrained to be in a contact with an inclined circular cylinder/ Paslay, P.R., Bogy D.B. // J. of Applied Mechanics. – 1964. – 31(3). – P.604-610.
2. Mitchell R.F. Helical buckling of pipe with connectors and torque / Mitchell R.F., Miska S. // SPE Drilling and Completion. – 2006. – 21(2). – P.108-115.
3. Андрусенко Е.Н. Изгиб бурильной колонны в криволинейной скважине с несовершенствами осевой линии / Андрусенко Е.Н., Гуляев В.И., Худолий С.Н. // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76. – Вып. 3. – С.459-468.
4. Gulyayev V.I. Theoretical simulation of geometrical imperfections influence on drilling operations at drivage of curvilinear bore-holes / Gulyayev V.I., Andrusenko E.N. // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2013. – V.112. – P.170-177.
5. Гуляев В.И. Численное моделирование упругого изгиба бурильной колонны в сверхглубокой криволинейной скважине / Гуляев В.И., Луговой П.З., Андрусенко Е.Н. // Прикладная механика. – 2014. – Т. 50, № 4. – С.67-76.
6. Gulyayev V.I. Modeling the Energy-Saving Regimes of Curvilinear Bore-Hole Drivage / Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Andrusenko E.N., Shlyun N.V. // J. of Offshore Mechanics and Arctics Engineering. – February, 2015. – V. 137. – № 1. – P.011402-1–011402-8.

Поступила в редколлегию 02.07.2015.

УДК 539.3

КОВАЛЬЧУК С.В., к.фіз.-мат.н., доцент
ДЕГТЯРЬ В.Г., к.фіз.-мат.н., доцент

Національний транспортний університет

НЕУСТАЛЕНИЙ РУХ ҐРУНТОВИХ ВОД ДО СВЕРДЛОВИНИ

Вступ. Як відомо, у водонасичених пластах в результаті зміни рівнів ґрунтових вод або при зовнішніх навантаженнях на пласт виникає пружний режим фільтрації. Особливо це різко проявляється в напірних пластах. Основи теорії пружного режиму фільтрації розглянуті в [1].

Якщо проводиться великий відбір води із безнапірних пластів за допомогою вертикальних свердловин при розробці корисних копалин і глибинному водопониженні, було виявлено суттєвий прояв пружного режиму фільтрації і в безнапірних пластах. Цьому присвячена постановка і розв'язування задачі в даній роботі.

Постановка задачі. Розглянемо задачу пружного режиму фільтрації до вертикальної свердловини зі сферичним фільтром в напівобмеженому по товщині пласті з рухомою вільною поверхнею.

Нехай на глибину ζ перпендикулярно до площини XOY опущена свердловина з фільтром в точці $(0,0,\zeta)$. Вільна поверхня ґрунтових вод, яка була горизонтальна, в процесі роботи свердловини не суттєво викривляється і гранична умова. яка повинна виконуватись на вільній поверхні ґрунтових вод, наперед невідомій, зноситься на площину XOY. Враховуючи малість такого викривлення допустима вказана лінеаризація задачі.

Вважаючи, що пружний режим фільтрації задовольняє рівняння Фур'є, а потенціал на фільтрі свердловини, який розглядається як потенціал точкового стоку, моделюється фундаментальним розв'язком цього рівняння, задача про знаходження цього потенціалу зводиться до знаходження функції впливу крайової задачі

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} - a^2 \Delta \varphi = \delta\left(r - r_0\right)\delta\left(t - t_0\right), \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \qquad \mathrm{z} = 0 \ \left(c = \frac{k}{\mu_0}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

де $\varphi\left(x, y, z, t\right)$ − потенціал швидкості фільтрації,

$a^2 = \dfrac{km}{\mu_c}$ − коефіцієнт п'єзопровідності,

δ − дельта-функція.

Для розв'язування задачі (1) скористаємось відомою функцією Гріна [2] задачі Неймана, яка є сумою двох фундаментальних розв'язків рівняння Фур'є для двох стоків рівної інтенсивності, розміщених симетрично відносно площини $z = 0$, і які забезпечують умову неперетікання $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,\ z = 0$.

Розв'язок задачі (1) шукаємо у вигляді суми функції Гріна і деякої функції V, а саме

$$\varphi = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi\left(t - t_0\right)}}\right)^3 \left[e^{-\frac{x^2+y^2+\left(z-\zeta\right)^2}{4a^2\left(t-t_0\right)}} + e^{-\frac{x^2+y^2+\left(z+\zeta\right)^2}{4a^2\left(t-t_0\right)}}\right] + V\left(x, y, \mathrm{z}+\zeta, \mathrm{t}-\mathrm{t}_0\right), \tag{2}$$

де функція V задовольняє рівняння Фур'є і вибрана так, щоб виконати граничну умову (1).

Враховуючи, що

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \left.\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right|_{z=0}, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=0} = -\frac{3}{8a^3\sqrt{\pi^3\left(t - t_0\right)}} e^{-\frac{x^2+y^2+\zeta^2}{4a^2\left(t-t_0\right)}} + \frac{x^2 + y^2 + \zeta^2}{16a^5\sqrt{\pi^3\left(t - t_0\right)^7}} e^{-\frac{x^2+y^2+\zeta^2}{4a^2\left(t-t_0\right)}} + \frac{\partial V}{\partial t}, \tag{4}$$

для знаходження $V\left(x, y, \mathrm{z}+\zeta, \mathrm{t}-\mathrm{t}_0\right)$ отримаємо диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + c\frac{\partial V}{\partial \zeta} = \left[\frac{3}{8a^3\sqrt{\pi^3\left(t - t_0\right)}} - \frac{x^2 + y^2 + \zeta^2}{16a^5\sqrt{\pi^3\left(t - t_0\right)^7}}\right] e^{-\frac{x^2+y^2+\zeta^2}{4a^2\left(t-t_0\right)}}, \tag{5}$$

Запишемо праву частину (5) у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi^3\left(t - t_0\right)}}\right) e^{-\frac{x^2+y^2+\zeta^2}{4a^2\left(t-t_0\right)}} \tag{6}$$

і скористаємось інтегральним представленням фундаментального розв'язку оператора Фур'є

$$\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi^3\left(t - t_0\right)}} e^{-\frac{x^2+y^2+\zeta^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\iint e^{-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)a^2\left(t-t_0\right)} e^{i\left(\alpha x+\beta y+\gamma\zeta\right)} d\alpha d\beta d\gamma, \tag{7}$$

Тоді отримаємо

$$\frac{\partial V}{\partial t}+c\frac{\partial V}{\partial \zeta}=\frac{1}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\iint\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)a^2 e^{-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)a^2(t-t_0)}e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}d\alpha d\beta d\gamma, \qquad (8)$$

Такий спеціальний вид правої частини дозволяє вибрати розв'язок, який задовольняє завідомо рівняння Фур'є і рівняння (5), що дає нам для функції V вигляд

$$V=\frac{1}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\iint A(\alpha,\beta,\gamma)e^{-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)a^2(t-t_0)}e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma\zeta)}d\alpha d\beta d\gamma,$$

Підставляючи відповідні похідні $\frac{\partial V}{\partial \zeta}$ і $\frac{\partial V}{\partial t}$ в граничну умову, для знаходження функції $A(\alpha,\beta,\gamma)$ отримаємо просте алгебраїчне рівняння

$$-A(\alpha,\beta,\gamma)a^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)+ci\gamma A(\alpha,\beta,\gamma)=a^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right), \qquad (9)$$

звідки

$$\begin{aligned} A(\alpha,\beta,\gamma)&=\frac{a^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)}{ci\gamma-a^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)},\\ A=A_1+iA_2&=-\frac{a^4\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)+ci\gamma a^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)}{a^4\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2+\gamma^2c^2}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Таким чином функція V знайдена у вигляді

$$v=\frac{1}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\iint\left(A_1+iA_2\right)e^{-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)a^2(t-t_0)}e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma\zeta)}d\alpha d\beta d\gamma, \qquad (11)$$

де

$$A_1=-\frac{a^4\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)}{a^4\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2+\gamma^2c^2},\quad A_2=-\frac{\gamma c a^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)}{a^4\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2+\gamma^2c^2}.$$

Враховуючи симетрію інтервалу інтегрування в (11) і властивості парності A_1, A_2 отримаємо

$$\begin{aligned} V=\frac{1}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\iint[A_1 e^{-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)a^2(t-t_0)}\cos\alpha x\cos\beta y\cos\gamma\zeta-\\ -A_2 e^{-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)a^2(t-t_0)}\cos\alpha x\cos\beta y\cos\gamma\zeta]\,d\alpha d\beta d\gamma \end{aligned} \qquad (12)$$

Отже функція Гріна задачі (1) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_\Gamma=&\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}}\right)^3\left[e^{-\frac{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-t_0)}}+e^{-\frac{x^2+y^2+(z+\zeta)^2}{4a^2(t-t_0)}}\right]-\\ &-\frac{a^4}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\iint\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{a^4\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2+\gamma^2c^2}e^{-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)a^2(t-t_0)}\cos\alpha x\cos\beta y\cos\gamma\left(z+\zeta\right)d\alpha d\beta d\gamma+\\ &+\frac{ca^2}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\iint\frac{\gamma\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)}{a^4\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2+\gamma^2c^2}e^{-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)a^2(t-t_0)}\cos\alpha x\cos\beta y\sin\gamma\left(z+\zeta\right)d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned} \qquad (13)$$

Висновки. В результаті розв'язування поставленої задачі знайдено вираз для потенціалу швидкості фільтрації (13), що дає можливість з одного боку отримати наближене рівняння вільної поверхні ґрунтових вод при безнапорному пружному режимі фільтрації, а з другого боку визначити величину витрати q при роботі свердловини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Щелкачев В.Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме / Щелкачев В.Н. – М.: Гостехиздат, 1959. – 468с.
2. Положий Г.Н. Уравнения математической физики / Положий Г.Н. – М.: Высшая школа, 1964 – 560с.

Надійшла до редколегії 22.06.2015.

УДК 539.3 ДАШКО О.Г., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫЙ СЛОЙ С КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ ПРИ ЗАДАННОЙ РАСЩЕПЛЯЮЩЕЙ СИЛЕ

Введение. Исследованию концентрации напряжений около отверстий в нетонких трансверсально-изотропных пластинах посвящено много публикаций [1-4]. Для решения задач в этой области широко используется метод разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины [5-7]. В работе [7] найдено решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пластины, на граничной поверхности которой задано значение расщепляющей силы, т.е. уравновешенной по толщине пары сил, стремящейся расщепить пластину по срединной плоскости, при отсутствии нормального радиального напряжения.

В данной работе излагается решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропного слоя с круговой цилиндрической полостью, на поверхности которой заданы однородные граничные условия для радиального смещения и действует уравновешенная по толщине пара сил (расщепляющая сила).

Постановка задачи. Рассмотрим неограниченный трансверсально-изотропный слой толщиной $2h$ $\left(h = const\right)$, содержащий круговую цилиндрическую полость, радиуса R. На поверхности полости $R \times \left[-h;h\right]$ выполняются условия третьей краевой задачи теории упругости: заданы значения нормального перемещения и касательных напряжений. Будем считать, что нормальное смещение $u_r\left(R,\theta,x_3\right)$ равно нулю, а касательные напряжения задаются формулами $\sigma_{r\theta}(R,\theta,x_3) = 0$, $\sigma_{r3}(R,\theta,x_3) = -q\xi(1-\xi^2)$, где q – некоторая константа, $\xi = x_3/h \in \left[-1,1\right]$. Эти поперечные касательные напряжения представляют уравновешенную по толщине пару сил, стремящуюся расщепить (или сжать) слой вдоль срединной плоскости. Необходимо определить и исследовать напряженное состояние в окрестности полости.

Результаты работы. Для сведения трехмерной задачи к двумерной воспользуемся методом разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от третьей координаты. Предполагая, что деформирование слоя будет симметричным относительно серединной плоскости S, представим составляющие вектора перемещений и тензора напряжений таким образом [8, 9].