5. Пономаренко В.С. Інформаційні системи в управлінні персоналом / В.С.Пономаренко. – Харків: ХНЕУ, 2008. – 336с.
6. Сендзюк М.А. Інформаційні системи в державному управлінні / М.А.Сендзюк. – К.: КНЕУ, 2004. – 339с.
7. Сиротинська А.П. Інформаційні системи підприємств малого бізнесу / А.П.Сиротинська. – К. : Центр учбової літератури, 2008. – 264с.
8. Контроль качества с помощью персональных компьютеров / Т.Макино, М.Охаси, Х.Доке, К.Макино; пер. с яп. – М.: Машиностроение, 1991. – 224с.
9. Шаповал М.І. Менеджмент якості: підруч. / М.І.Шаповал. – К.: Знання, 2006. – 471с.
10. Агєєв Є.Я. Управління якістю: навч.-метод. посіб. для самостійної роботи по вивченню дисципліни / Є.Я.Агєєв. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2009. – 240с.
11. Корпорація ПАРУС. Офіційний сайт. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http:// www.parus.ua.
12. SAP R/3: Менеджмент / под ред. М.Ребштока, К.Хильдербранда; пер. с нем. – Минск: Новое знание, 2001. – 208с.
13. Заметки управленца. Программы в помощь СМК. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://mymanager.com.ua/smk/smkinstr.php.

Надійшла до редколегії 18.05.2015.

УДК 004.057.3

ЖУЛЬКОВСКАЯ И.И., к.т.н., доцент
ЖУЛЬКОВСКИЙ О.А., к.т.н., доцент
ШАГАНЕНКО Р.Г., студент

Днепродзержинский государственный технический университет

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛНОГО ДИАПАЗОНА ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЕЛ С ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ IEEE-СТАНДАРТА

Введение. Как известно, в настоящее время необычайно высокими темпами развивается отрасль высокопроизводительных вычислений. Высокая динамика роста производительности компьютеров определяет стремительное увеличение масштабов вычислений [1]. Все это, в свою очередь, выдвигает качественно новые требования к численным методам, вычислительным алгоритмам и тестированию программного обеспечения. Одним из таких требований является получение за приемлемое время корректного результата решения задачи, не искаженного погрешностями.

Известно, что в процессе решения численных задач с использованием вычислительной техники возникают погрешности следующих видов [2]:

– неустранимые погрешности, причина которых – неточное математическое описание задачи, вызванное ограниченностью объема исходных данных;

– погрешности дискретизации: получение точного решения возникающей в природе задачи требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций, поэтому приходится прибегать к дискретизации по времени и пространству, получая приближенный результат вместо точного непрерывного решения;

– вычислительные погрешности, возникающие из-за неизбежных округлений при выполнении вычислительных операций в арифметике с конечной точностью (разрядностью).

Численное решение большинства практических задач сопряжено, главным образом, с выполнением операций над действительными (вещественными) числами или так называемыми числами с плавающей запятой (точкой).

Сам формат чисел с плавающей запятой и правила действий над ними определены в стандартах *IEEE* 754 [3-5], которые с недавних пор стали коммерческим продуктом и не находятся в свободном распространении и обращении в связи с реорганизацией ассоциации *IEEE* из международной общественной инженерной организации в коммерческую.

Ограничение доступности указанных стандартов не могло не сказаться на компетентности постановки вычислительных задач и достоверности результатов численного экспериментирования.

Известные и доступные публикации на тему представления и хранения действительных чисел в памяти компьютера [6-9] рассматривают вопросы погрешностей результатов при вычислении функций, пути минимизации ошибок, связанных с округлением, создания тестов для реализаций математических функций.

Все вышесказанное повышает значимость проблемы машинного представления и хранения числовой информации в современных вычислительных системах.

Постановка задачи. Ранее [10] авторами данной работы исследован и описан алгоритм современного подхода к формированию машинного представления и хранения числовой информации в формате с плавающей запятой. Также рассмотрены особенности представления и вычислены граничные значения субнормальных [11] и нормализованных [12] числовых данных рассматриваемого стандарта.

Целями же настоящей работы являются исследование особенностей представления величин специального вида, представимых в форматах с плавающей запятой, а также получение полного диапазона значений чисел с плавающей запятой в стандарте *IEEE* 754.

Результаты роботы. Как известно, согласно стандарта *IEEE* 754 битовое представление чисел с плавающей запятой имеет следующую структуру. Число представлено в виде набора n бит, из которых один бит является знаковым битом числа. Следующие k бит представляют его экспоненту, а оставшиеся биты – мантиссу. Знаковый бит равен 0 для положительных чисел, и 1 – для отрицательных. Экспонента представляется не как целое число со знаком в явном виде, а в виде беззнакового числа, называемого смещенным порядком.

В общем виде, если экспонента действительного числа занимает k бит и находится в промежутке от 0 до 2^{k-1}, то величина смещения порядка или смещения экспоненты (*exponent bias*) определяется по формуле

$$b = 2^{k-1} - 1. \qquad (1)$$

Для увеличения количества значащих цифр при представлении действительного числа и предотвращения переполнения при выполнении арифметических операций мантиссу нормализуют. В нормализованном двоичном числе старший разряд всегда равен 1, поэтому в памяти его можно не хранить.

Стандарт *IEEE* 754 определяет несколько возможных типов чисел с плавающей запятой, из которых чаще всего используются числа одинарной точности (*single precision*), числа двойной точности (*double precision*) и числа двойной расширенной точности (*double-extended precision).* Они отличаются диапазоном представимых значений. Параметры базовых форматов приведены в табл.1.

Особенность представления действительных чисел со скрытой единицей в том, что имеется довольно большой разрыв между нулем и ближайшим к нему представимым числом – потеря значимости (*underflow*) около нуля. Это обстоятельство может приводить к ошибкам при работе с малыми величинами.

Таблица 1 – Параметры базовых форматов чисел с плавающей запятой

Формат	Всего бит (n)	Бит в порядке (k)	Бит в мантиссе	Смещение порядка (b)
single	32	8	23	127
double	64	11	52	1023
extended	80	15	64	16383

Для повышения точности вычислений при работе с «маленькими» числами в стандарте предусмотрена возможность использования так называемого «мягкого исчезновения порядка» или мягкого антипереполнения. Суть этого подхода состоит в трактовке кодов с нулевым порядком $000\ldots00_2$ и ненулевой мантиссой как специальных значений, которые принято называть денормализованными числами. При этом используется следующее правило: если код содержит все нули в отведенных под порядок разрядах $000\ldots00_2$ и ненулевую мантиссу, то считается, что порядок числа равен $000\ldots001_2$, а явно не указанная в поле целая часть мантиссы принимается равной нулю. Следовательно, мантисса ненормализованная, и ее код фактически совпадает с числом. В версии стандарта *IEEE* 754-2008 денормализованные числа (*denormal* или *denormalized numbers*) были переименованы в *subnormal numbers*, т.е. в числа, меньшие «нормальных». Поэтому их иногда еще называют «субнормальными».

Субнормальные числа находятся ближе к нулю, чем нормализованные. Субнормальные числа как бы разбивают минимальный разряд нормализованного числа на некоторое подмножество. Такая организация, очевидно, связана с тем, что в технической практике чаще встречаются близкие к нулю величины.

Таким образом, в обсуждаемом стандарте минимально возможный n-битовый машинный порядок нормализованных чисел равен $000\ldots01_2$, а максимально возможный – $111..10_2$.

Как видно из вышеизложенного, в нормализованной форме числа с плавающей запятой невозможно представить ноль. Поэтому для его представления зарезервированы специальные значения мантиссы и порядка – число считается нулем, если все его биты, кроме знакового, равны нулю (рис.1). При этом существует число с плавающей запятой –0, отличающееся от +0 (*signed zero*). Однако стандарт требует считать их равными. Кроме того, ни одна из операций над числами с плавающей запятой не должна давать в результате –0.

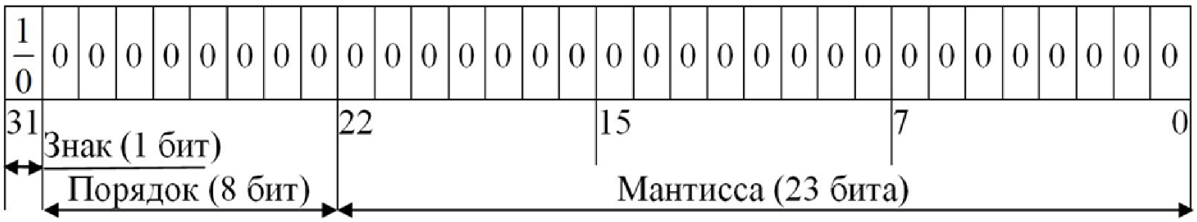

Рисунок 1 – Представление нуля в формате *single*

Стандарт *IEEE* 754 предусматривает наличие специальных значений для машинных чисел, которым соответствуют не числа с плавающей запятой, а другие объекты. Примером простейших объектов такого типа являются положительная и отрицательная бесконечности (*infinities*): $+\infty$ и $-\infty$.

Согласно стандарта *IEEE 754* число с плавающей запятой считается равным бесконечности, если все двоичные разряды его порядка — единицы, а мантисса равна нулю. Знак бесконечности определяется знаковым битом числа (рис.2).

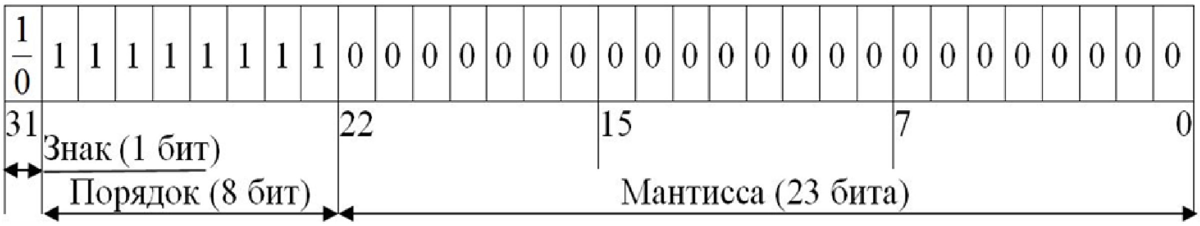

Рисунок 2 – Представление бесконечности в формате *single*

В процессе вычислений бесконечность возникает тогда, когда результат арифметической операции больше по абсолютному значению границ диапазона представления чисел. Результаты вычислений с бесконечностями являются вполне определенными. Получить бесконечность можно при переполнении (*overflow*) и при делении ненулевого числа на ноль (*division by zero*).

Кроме того, стандартом определяются специальные значения, так называемые «не-числа» (*NaN,Not-a-Number*). В *IEEE 754 NaN* представлен как число, в котором все двоичные разряды порядка – единицы, а мантисса – не нулевая (рис.3).

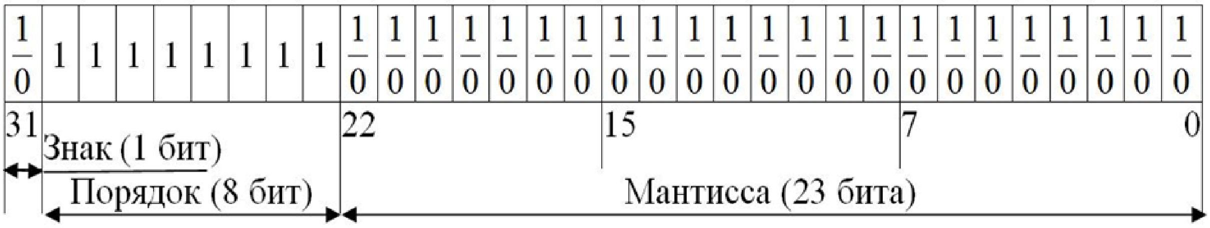

Рисунок 3 – Представление *NaN* в формате *single*

NaN используется, если результат выполняемых действий нельзя представить корректно (например, при умножении бесконечностей противоположных знаков, при делении бесконечностей, при делении нулей и т.д.). Таким образом, *NaN* возникает в случае неопределенности.

Теперь, используя формулы, выведенные в работах [11, 12], получаем полный диапазон значений чисел с плавающей запятой стандарта *IEEE* 754 (табл.2).

Таблица 2 – Полный диапазон значений чисел с плавающей запятой стандарта *IEEE* 754

Число	Формат		
	single	*double*	*extended*
Минимальное субнормальное число	$\pm 1.401298E-45$	$\pm 4.940656E-324$	$\pm 3.6451995E-4951$
Максимальное субнормальное число	$\pm 1.175494E-38$	$\pm 2.225073E-308$	$\pm 3.362103E-4932$
Минимальное нормализованное число	$\pm 1.175494E-38$	$\pm 2.225073E-308$	$\pm 3.362103E-4932$
Максимальное нормализованное число	$\pm 3.402823E+38$	$\pm 1.797693E+308$	$\pm 1.189731E+4932$

Выводы. В работе описаны особенности машинного представления, хранения и назначение величин специального вида, представимых в форматах с плавающей запятой стандарта *IEEE* 754. К ним относятся так называемые знаковый ноль и не-число, а также положительная и отрицательная бесконечности. Также описано представление действительных чисел, получен их полный диапазон для различных форматов указанного стандарта.

Проблемы корректных вычислений связаны, прежде всего, с дискретностью представления чисел с плавающей запятой. Поэтому в процессе разработки и тестирования программного обеспечения для минимизации ошибок вычислений необходимо понимать особенности представления, хранения и применения всех величин с плавающей запятой, определяемых *IEEE*-стандартом.

ЛИТЕРАТУРА

1. TOP500 Supercomputing Sites. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.top500.org.
2. Самарский А.А. Численные методы: учеб. пособ. для вузов / Самарский А.А., Гулин А.В. – М.: Наука, 1989. – 432с.
3. IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic. – New York, 1985. – 23p.
4. IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic. – New York, 2008. – 70p.
5. IEEE floating point – Wikipedia, the free encyclopedia. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_floating_point.
6. Ніконов О.Я. Оцінка точності обчислень спеціальних функцій при розробці комп'ютерних програм математичного моделювання / О.Я.Ніконов, О.В.Мнушка, В.М.Савченко // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ. – 2011. – №17. – С.115-121.
7. Кулямин В.В. Формальные подходы к тестированию математических функций / Кулямин В.В. // Труды ИСП РАН. – 2006. – №10. – С.69-114.
8. Аноприенко А.Я. Гибкая разрядность и постбинарные форматы представления вещественных чисел / Аноприенко А.Я., Иваница С.В. // Вестник Инженерной Академии Украины: теоретический и научно-практический журнал Инженерной Академии Украины. – Киев. – 2012. – Вып.1. – С.92-98.
9. Кулямин В.В. Стандартизация и тестирование выполнения математических функций в вычислениях с плавающей точкой / Кулямин В.В. // Программирование. – 2007. – №3. 33(3). – С.44-72.
10. Жульковская И.И. Алгоритм формирования машинного представления числовых данных в формате с плавающей запятой / Жульковская И.И., Жульковский О.А. // Математичне моделювання. – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2013. – №2 (29). – С.69-72.
11. Жульковская И.И. Вычисление граничных значений субнормальных чисел в IEEE-стандарте / Жульковская И.И., Жульковский О.А., Шаганенко Р.Г.// Математичне моделювання. – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2015.– №1 (32).– С.41-44.
12. Жульковская И.И. Вычисление граничных значений действительных числовых данных в IEEE-стандарте / Жульковская И.И., Жульковский О.А., Николаенко Ю.В. // Зб. наук. праць ДДТУ (технічні науки). – Дніпродзержинськ, ДДТУ. – 2015. – №.1 (26).– С.240-245.

Поступила в редколлегию 01.09.2015.