УДК 519.866

Андрій Андрейцев

ПОБУДОВА НЕЛІНІЙНОЇ СТАТИЧНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТА СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ ВИРОБНИЧИХ ВИТРАТ

Розглянуто узагальнену статичну математичну модель витрат, що враховує нелінійну їх залежність від обсягу виробництва, викликану спеціалізацією та дією закону спадання граничної віддачі. Проведено аналіз нелінійної складової даної моделі. Проаналізовано два часткових випадки. Для моделі, що включає показникові нелінійності, проведено структуризацію витрат.

Ключові слова: *витрати, спеціалізація, закон спадання граничної віддачі, математична модель.*

Рассмотрена обобщенная статическая математическая модель издержек, учитывающая их нелинейную зависимость от объёма производства, вызванную специализацией и действием закона убывания предельной отдачи. Проведён анализ нелинейной составляющей данной модели. Проанализированы два частных случая. Для модели, включающей показательные нелинейности, проведена структуризация издержек.

Ключевые слова: *издержки, специализация, закон убывания предельной отдачи, математическая модель.*

The generalized static mathematical model of costs, taking into account their nonlinear dependence on a production volume, is considered, caused by specialization and action of law of diminishing marginal returns. The analysis of nonlinear constituent of this model is conducted. Two particular case is analyzed. For a model, including model to non-linearity, structuring of costs is conducted.

Keywords: *costs, specialization, law of diminishing marginal returns, mathematical model.*

В умовах світової економічної кризи останніх років проблема оптимізації виробничих витрат після сорокарічної перерви знову стає актуальною. В цьому сенсі на перший план виходять кількісні методи економічного аналізу, що базуються на побудові адекватних математичних моделей та аналітичному або чисельному їх дослідженні.

Предметом даного дослідження є статичні витрати (витрати короткострокового періоду), що залежать лише від обсягу виробництва і не враховують часові зміни. Першим кроком в напрямку моделювання витрат був їх поділ на змінні $ЗВ = f(x)$ (що залежать від обсягу виробництва x) та сталі $d = const$. Однак дослідження сукупних витрат (CB) в основному обмежувалось лінійним випадком $CB = cx + d$, де c – стала величина [1].

дослідження сукупних витрат (CB) в основному обмежувалось лінійним випадком $CB = cx + d$, де c – стала величина [1].

Однак лінійна модель не задовольняє вимогам законів політекономії, що стосуються витрат. Відомо [2], що граничні: $ГB = \lim\limits_{\Delta \to x} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$, середні змінні: $C3B = \frac{f(x)}{x}$ та середні сукупні витрати: $CCB = \frac{f(x)+d}{x} = C3B + \frac{d}{x}$ спочатку спадають, досягають мінімуму, а потім зростають. У випадку ж лінійної моделі: $ГB = C3B = c$ є сталими.

Метою даної роботи є побудова та аналіз узагальненої математичної моделі сукупних витрат та структурний аналіз витрат для моделі, що включає показникові нелінійності.

Узагальнену функцію сукупних витрат запишемо у вигляді:

$$CB = f(x) + cx + d\,, \tag{1}$$

тобто змінні витрати $3B = f(x) + cx$ будуть сумою лінійної частини, що є добутком сталого коефіцієнта (наприклад, вартість сировини необхідної для виробництва одиниці продукції) на кількість виробленої продукції та витрат, пов’язаних зі спеціалізацією персоналу та дією закону спадання граничної віддачі, які залежать від обсягу виробництва нелінійно.

Спершу розглянемо граничні витрати

$$ГB = \lim_{\Delta \to x} \frac{\Delta\big(f(x) + cx\big)}{\Delta x} = f'(x) + c\,,$$

як витрати, що виникають при виробництві наступної одиниці продукції. При невеликих обсягах виробництва, граничні витрати зменшуються за рахунок спеціалізації, але в силу закону спадання граничної віддачі, починаючи з деякого обсягу вони починають зростати. Таким чином, існує точка x_1, в якій граничні витрати досягають мінімуму, тобто похідна від граничних витрат:

$$\big(f'(x_1) + c\big)' = f''(x_1) = 0$$

за умови $f'(x_1) + c > 0$, оскільки в реальній ситуації граничні витрати не можуть бути від’ємними.

Щодо середніх змінних витрат:

$$C3B = \frac{f(x) + cx}{x} = \frac{f(x)}{x} + c\,,$$

слід зауважити, що при невеликих обсягах виробництва вони є більшими за граничні витрати. $C3B$ досягають свого мінімуму в точці x_2 , що визначається із рівняння: $f'(x_2)x_2 - f(x_2) = 0$,

при цьому в точці x_2 граничні та середні змінні витрати рівні між собою.

Крім того, оскільки:

$$\big(f'(x)x - f(x)\big)' = f''(x_1)x > 0 \quad \text{при} \quad x > x_1\,, \tag{2}$$

то згідно з другою достатньою умовою мінімуму $x_2 > x_1$.

Зазначимо, що еластичність змінних витрат:

$$E(3B, x) = \frac{\big(f'(x) + c\big)x}{f(x) + cx} = 1 + \frac{f'(x)x - f(x)}{f(x) + cx}$$

і згідно з (2), при $x = x_2$, другий доданок рівний нулю, тобто $E(ЗВ, x_2) = 1$. При $x < x_2$ вона менша, а при $x > x_2$ більша за одиницю.

Середні сукупні витрати:

$$CCB = \frac{f(x) + cx + d}{x}$$

досягають свого мінімуму в точці x_3, що задовольняє рівнянню:

$$f'(x_3)x_3 - f(x_3) - d = 0, \tag{3}$$

яке отримуємо прирівнявши похідну від середніх сукупних витрат до нуля. В точці x_3 середні сукупні та граничні витрати рівні між собою. Крім того, оскільки середні сукупні витрати завжди більші за середні змінні, а функція граничних витрат при $x > x_1$, зростає, то $x_3 > x_2$. При цьому x_3 – єдиний додатній корінь рівняння (3).

Еластичність сукупних витрат в точці x_3, згідно з (3),

$$E(CB, x_3) = \frac{(f'(x_3) + c)x_3}{f(x_3) + cx_3 + d} = 1 + \frac{f'(x_3)x_3 - f(x_3)}{f(x_3) + cx_3 + d} = 1.$$

При $x < x_3$ $E(CB, x_3)$ менша за одиницю, а при $x > x_3$ більша. Виходячи з означення еластичності при обсязі виробництва, більшому за x_3, подальше його нарощування є неефективним, і обсяг рівний x_3 є оптимальним.

Якщо вважати, що $f(x) = g(x)x$, то формули для знаходження x_2 та x_3 суттєво спрощуються: $g'(x_2) = 0, \quad g'(x_3)x_3^2 = d$.

Розглянемо випадок, коли $f(x)$ є різницею двох степеневих функцій:

$$f(x) = ax^n - bx^m, \quad a, b > 0, \quad n > m \geq 2. \tag{4}$$

Тоді:

$$x_1 = \left(\frac{bm(m-1)}{an(n-1)}\right)^{\frac{1}{n-m}}, \quad x_2 = \left(\frac{b(m-1)}{a(n-1)}\right)^{\frac{1}{n-m}},$$

а x_3 є розв'язком рівняння:

$$a(n-1)x_3^n - b(m-1)x_3^m - d = 0.$$

При цьому повинна виконуватись умова:

$$anx_1^{n-1} - bmx_1^{m-1} + c > 0.$$

Випадок, коли $n = 3, m = 2$

$$CB = ax^3 - bx^2 + cx + d \quad a, b, c, d > 0. \tag{5}$$

Розглянуто в [3], де показано, що:

$$x_1 = \frac{b}{3a}, \; x_2 = \frac{b}{2a}, \; 2ax_3^3 - bx_3^2 - d = 0,$$

за умови невід'ємності граничних витрат: $c > \frac{b^2}{3a}$.

На рис.1 наведено графіки витрат для даної моделі. Рис.1 є наочною ілюстрацією зв'язків між граничними, середніми змінними та середніми сукупними витратами, а кубічний поліном (5) найпростішою функцією, що узгоджується з законами політекономії, яким підпорядковані витрати.

Однак функція $f(x)$, виду (4) на жаль не дає можливості структурування витрат по типам факторів, що по різному впливають на їх зміну. Окрім того, припущення про степеневий характер змінних витрат, пов'язаних зі спеціалізацією та дією закону спадання граничної віддачі, є досить грубим.

Більш реалістичними є моделі, що включають в себе показникові функції. Для спрощення формул будемо розглядати функції з основою e, до яких можна звести показникові функції з іншою основою.

Сукупні витрати розділимо на чотири типи: сталі; змінні лінійні; змінні, пов'язані зі спеціалізацією; змінні, викликані дією закону спадання граничної віддачі, включаючи надмірні управлінські витрати на підприємствах-гігантах.

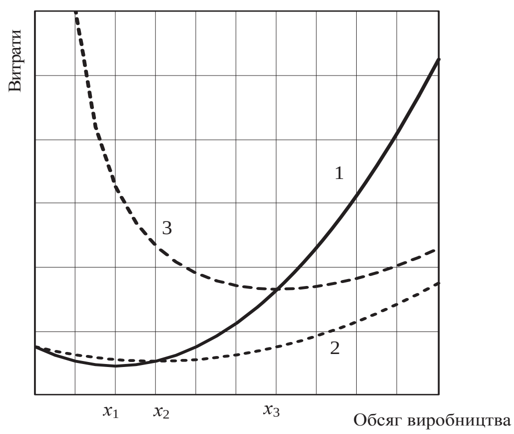

Рис. 1. **Графіки:** 1 – граничних витрат; 2 – середніх змінних витрат; 3 – середніх сукупних витрат

Таким чином, нелінійна частина змінних витрат – це сума витрат третього і четвертого типу.

Витрати, пов'язані зі спеціалізацією досить добре описуються функцією:

$$ЗВС = \left(be^{-\beta x} + c_c\right)x.$$

Із збільшенням обсягу виробництва, відповідні їм середні витрати $СЗВС = be^{-\beta x} + c_c$ спадають, при цьому $\lim\limits_{x \to \infty} СЗВС = c_c$.

Граничні ж витрати $ГЗВС$ спочатку спадають, а потім зростають до значення c_c.

Витрати, пов'язані з дією закону спадання граничної віддачі, можна апроксимувати функцією: $ЗВУ = ae^{\alpha x}x + d_y$.

Відповідні їм змінні та граничні витрати необмежено зростають із збільшенням обсягу виробництва.

Якщо c_c включити до лінійної частини змінних витрат, а d_y до сталих витрат, то одержимо таку модель:

$$CB = \left(ae^{\alpha x} + be^{-\beta x} + c\right)x + d \quad a, b, c, d, \alpha, \beta > 0. \qquad (6)$$

Аналізуючи дану функцію, отримуємо:

$$ГВ = a(1+\alpha x)e^{\alpha x} + b(1-\beta x)e^{-\beta x} + c,$$

$$СЗВ = ae^{\alpha x} + be^{-\beta x} + c,$$

$$ССВ = ae^{\alpha x} + be^{-\beta x} + c + \frac{d}{x}.$$

x_1, x_2, x_3 є розв'язками рівнянь:

$$\alpha a(2+\alpha x_1)e^{\alpha x_1} - \beta b(2-\beta x_1)e^{-\beta x_1} = 0,$$

$$\alpha ae^{\alpha x_2} - \beta be^{-\beta x_2} = 0,$$

$$\alpha ae^{\alpha x_3} - be^{-\beta x_3} = \frac{d}{x_3^2}.$$

Умова невід'ємності граничних витрат:

$$a(1+\alpha x_1)e^{\alpha x_1} + b(1-\beta x_1)e^{-\beta x_1} + c > 0.$$

Графіки витрат в даному випадку аналогічні наведеним на рис.1 і повністю узгоджуються з економічною теорією.

На завершення зазначимо, що дане дослідження є теоретичним. Наприклад, функції (6) включають шість невідомих параметрів, що підлягають визначенню. Для розв'язання даної задачі необхідна значна статистична база. Подальше дослідження крім накопичення та обробки статистичних даних, необхідно продовжувати і в напрямку врахування часових змін, тобто побудови і дослідження динамічних моделей витрат.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Тинтнер Г.* Введение в эконометрию. – М.: Мир, 1965. – 361 с.

2. *Кэмпбелл Р., Макконнелл, Стэнли Л. Брю.* Экономикс: принципы, проблемы и политика. – Т.2. – М.: Республика, 1993. – 400 с.

3. *Беспалова Н. П.* Аналіз параметрів функції витрат в короткостроковому періоді // Збірник тез XLII науково-практичної конференції молодих учених, аспірантів і студентів «Залізничний транспорт: сучасні проблеми науки». – К.: ДЕТУТ. – 2012. – С. 12.