УДК 531.53: 517.938

Ольга Бамбура
Виктория Ковальчук
Леонид Лобас
Людмила Лобас

О СОСТОЯНИЯХ РАВНОВЕСИЯ МАЯТНИКА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ АСИММЕТРИЧНОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Одним из основных конструктивных элементов путеукладочных кранов, опор железнодорожных мостов и сооружений является сжатый стержень, к концу которого приложена следящая сила. В последнее время наиболее часто используется модель такого стержня в виде перевернутого математического маятника под действием следящей силы. В данной работе рассмотрено влияние параметров маятника на эволюцию состояний равновесия маятника.

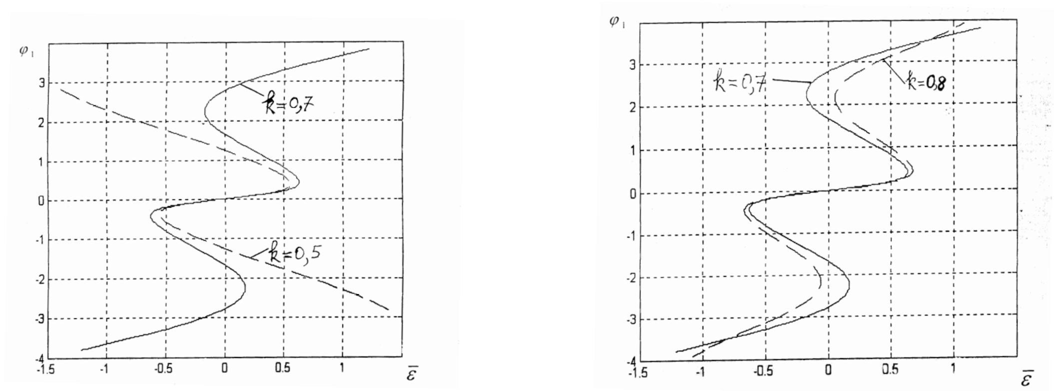
Введение. Понятия бифуркаций стационарных состояний и предельных циклов, катастроф, аттракторов и областей притяжения широко используются в различных отраслях науки. Интерес, проявляющийся к ним в последнее время во многих странах, объясняется тем, что задача обнаружения превращения количественных изменений в качественные является ключевой в раскрытии принципиальных тайн природы и существа происходящих в ней глубинных процессов и явлений.

Явление бифуркации (лат. *bifurcus* – раздвоение, разветвление) в фазовом пространстве, или в пространстве состояний, динамической системы соответствует качественному изменению характера движения исходной механической системы. Известны бифуркации состояний равновесия, приводящие к переходу системы к другому состоянию равновесия или к периодическому движению, бифуркации предельных циклов и т. д. Такой переход осуществляется в точках бифуркации, где путь эволюции нелинейной системы разветвляется. В этих точках траектории ветвятся, причем выбор ветки, по которой пойдет дальнейшее развитие, определяется лишь спектром возможностей динамической системы в данных условиях и зависит от параметров системы и от факторов локального масштаба. По современной терминологии теория бифуркаций изучает перестройки качественной картины движения при изменении параметров, а приложения теории бифуркаций к исследованию скачкообразных реакций механических, физических, химических, биологических, экономических и иных систем на плавное изменение внешних условий или внутренних свойств системы получили название теории катастроф [1].

Результаты исследования бифуркаций состояний равновесия перевернутого двойного маятника, нагруженного на верхнем конце асимметричной следящей силой, представлены в [3 – 13]. В [12] рассмотрено влияние нелинейности характеристик упругих элементов на бифуркации стационарных состояний двухзвенного маятника. В данной работе построены бифуркационные кривые одиночного перевернутого маятника, находящегося под воздействием асимметричной следящей силы, и исследованы качественные изменения динамического поведения системы при варьировании параметра ориентации этой силы. Показано, что при плавном изменении линейного эксцентриситета следящей силы возможны скачкообразные переходы от одного устойчивого состояния равновесия к другому (катастрофы).

1. Постановка задачи. Расчетная схема перевернутого одиночного маятника, изображенная в [2] на рис. 1, состоит из невесомого стержня OA_1 длиной l_1 и материальной точки A_1 массой m_1. В точке опоры O размещен упруговязкий шарнир (реализуемый, например, посредством спиральной пружины и гидравлического демпфера). Пусть c – жесткость спиральной пружины, μ_1 – коэффициент вязкости в шарнире O, учитывающий также действие внешнего трения. Верхний конец маятника упруго закреплен посредством горизонтальной пружины жесткости c. Аналогично [3] считаем, что в вертикальном положении маятника все упругие элементы недеформированы. К верхнему концу маятника приложена также следящая сила $\vec{P}$. Исходя из физического толкования следящей силы, отметим, что в многочисленных публикациях разные авторы по-разному объясняли происхождение этого понятия. Впервые оно появилось в работах A. Pflüger [14] и H. Ziegler [17, 18], в которых они и обосновали его введение в механику. Известный механик современности H. Troger в монографии [16] указывает, что следящие силы были введены в рассмотрение при исследовании колебаний Трансарабского трубопровода. В рассматриваемой модели будем считать, что модуль силы $\vec{P}$ постоянен, а ее направление не является ни вертикальным ("мертвая" нагрузка), ни касательным к изогнутой оси стержня (симметричная нагрузка). Практически асимметрия следящей силы может реализоваться, например, в результате изначальных неточностей или нарушений центровки [6, 7, 13].

Угол между силой $\vec{P}$ и вертикалью обозначим через $\alpha = \delta + k\,\varphi_1$. Здесь $\delta = \mathrm{const}$ – угловой эксцентриситет; $k = \mathrm{const}$ – параметр ориентации следящей силы; φ_1 – угол отклонения маятника от вертикали.



а *б*

Рис. 1. **Кривые состояний равновесия маятника**

Величину φ_1 принимаем за независимую координату. Для декартовых координат точки A_1 имеем:

$$x_1 = l_1 \cos\varphi_1 ; \; y_1 = l_1 \sin\varphi_1 . \tag{1.1}$$

Для составления дифференциального уравнения движения маятника воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода. Для кинетической энергии маятника

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right)$$

с учетом (1.1) получаем выражение

$$T = \frac{m_1 l_1^2}{2}\dot{\varphi}_1^2 .$$

Отклонение маятника от вертикали приводит к деформации упругих элементов, в результате чего эти элементы создают восстанавливающую силу $\vec{Q}_C$ и восстанавливающий момент $\overline{M}_1$. Таким образом, угол φ_1 удовлетворяет уравнению [3]

$$m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 = m_1 g l_1 \sin\varphi_1 + P\left\{l_1 \sin\left[(1-k)\varphi_1 - \delta\right] + \varepsilon\cos\left[(1-k)\varphi_1 - \delta\right]\right\} - \tag{1.2}$$

$$-\left(q_1 Q'_C + q_2 Q''_C + q_3 Q'''_C\right) l_1 \cos\varphi_1 - \left(q_{11} M'_1 + q_{12} M''_1 + q_{13} M'''_1\right) .$$

Здесь введены коэффициенты влияния q_i и q_{ij} (i, j = 1, 2), позволяющие учитывать различные типы характеристик упругих элементов [9]. Для Q_c, $M_1(a,b,c)_q$ и $(a,b,c)_m$ или по аналогии с q_j, q_{ij} одним, двумя и тремя штрихами обозначены составляющие силы $\vec{Q}_C$ и момента $\vec{M}_1$, отвечающие жестким, мягким и линейным характеристикам соответственно. Зависимости $Q_C(y_1)$ определяются экспериментально, и в [9] приведены возможные аналитические аппроксимации этих зависимостей. Величина ε является линейным эксцентриситетом, учитывающим возможную неточность приложения следящей силы $\vec{P}$.

Конечные уравнения (1.1) и дифференциальное уравнение (1.2) описывают плоскопараллельное движение маятника в плоскости xOy. Примем в качестве единиц измерения значения величин m_1, l_1 и c_1, отнеся все остальные величины к этим трем (базисным). Безразмерные величины обозначим чертой сверху:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{l_1}, \; \overline{P} = P\frac{l_1}{c_1}, \; \bar{c} = c\frac{l_1^2}{c_1}, \; \bar{t} = t\frac{\sqrt{c_1}}{l_1\sqrt{m_1}}, \; \bar{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{l_1\sqrt{m_1 c_1}}, \; \bar{g} = g\frac{m_1 l_1}{c_1},$$

$$\bar{a} = \frac{a}{l_1}, \; \bar{b} = \frac{b l_1}{c_1}, \; \bar{b}_1 = \frac{b_1}{c_1}, \; \bar{y}_1 = \frac{y_1}{l_1} = \sin\varphi_1 .$$

Здесь a – максимально возможный ход горизонтальной пружины на верхнем конце маятника в случае жестких характеристик.

Соответствующую характеристику спиральной пружины в шарнире O обозначим a_1

$$Q'_C = \frac{2ac}{\pi}\ \mathrm{tg}\frac{\pi y_1}{2a},\ \ M'_1 = \frac{2a_1 c_1}{\pi}\ \mathrm{tg}\frac{\pi \varphi_1}{2a_1}.$$

Пусть b и b_1 – предельные значения модулей восстанавливающей силы $\vec{Q}''_C$ и восстанавливающего момента $\vec{M}''_1$ в случае мягких характеристик:

$$Q''_C = \frac{c\,y_1}{\sqrt{1+\dfrac{c^2 y_1^2}{b^2}}}\ ,\ M''_1 = \frac{c_1\,\varphi_1}{\sqrt{1+\dfrac{c_1^2\,\varphi_1^2}{b_1^2}}}\ .$$

Для пружин с линейными характеристиками имеем

$$Q'''_C = c\,y_1\,,\ \ M'''_1 = c_1\,\varphi_1\,.$$

Дифференциальное уравнение движения маятника в безразмерной форме имеет вид:

$$\varphi''_1 + (\,q_{11} + q_{12} + q_{13}\,)\,\overline{\mu}_1\,\varphi'_1 =$$

$$= \overline{g}\,\sin\varphi_1 + \overline{P}\,\left\{\sin\left[(1-k)\,\varphi_1 - \delta\right] + \overline{\varepsilon}\cos\left[(1-k)\,\varphi_1 - \delta\,\right]\right\} -$$

$$-\overline{c}\left(q_1\,\frac{2\overline{a}}{\pi}\,\mathrm{tg}\frac{\pi\overline{y}_1}{2\overline{a}} + q_2\,\frac{\overline{y}_1}{\sqrt{1+\dfrac{\overline{c}^2\,\overline{y}_1^2}{\overline{b}^2}}} + q_3\overline{y}_1\right)\cos\varphi_1 - \qquad (1.3)$$

$$-q_{11}\,\frac{2a_1}{\pi}\,\mathrm{tg}\frac{\pi\varphi_1}{2a_1}\ -q_{12}\,\frac{\varphi_1}{\sqrt{1+\dfrac{\varphi_1^2}{\overline{b}_1^2}}}\ -\ q_{13}\varphi\ .$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\bar{t}$.

Уравнение (1.3) при $\delta = 0$ и $\varepsilon = 0$ допускает решение $\varphi_1 = 0$, отвечающее вертикальному положению равновесия маятника. Рассмотрим задачу существования положений равновесия маятника при $\delta \neq 0$ и $\varepsilon \neq 0$.

2. Влияние линейного эксцентриситета следящей силы на состояния равновесия маятника. На основании дифференциального уравнения движения (1.3) запишем уравнение равновесия маятника в виде

$$f_1\,(\varphi_1\,,\ \delta,\ \overline{\varepsilon}) = 0, \qquad (2.1)$$

где

$$f_1\,(\varphi_1\,,\ \delta,\ \overline{\varepsilon}) = \ \overline{g}\,\sin\varphi_1 + \overline{P}\,\left\{\sin\left[(1-k)\,\varphi_1 - \delta\right] + \overline{\varepsilon}\cos\left[(1-k)\,\varphi_1 - \delta\,\right]\right\} -$$

$$-\bar{c}\left(q_1\frac{2\bar{a}}{\pi}\,\mathrm{tg}\frac{\pi\,\bar{y}_1}{2\bar{a}}+q_2\frac{\bar{y}_1}{\sqrt{1+\frac{\bar{c}^2\,\bar{y}_1^2}{\bar{b}^2}}}+q_3\,\bar{y}_1\right)\cos\varphi_1-$$

$$-q_{11}\frac{2a_1}{\pi}\,\mathrm{tg}\frac{\pi\varphi_1}{2a_1}-q_{12}\frac{\varphi_1}{\sqrt{1+\frac{\varphi_1^2}{\bar{b}_1^2}}}-q_{13}\,\varphi_1\,.$$

Рассмотрим возможность разрешения уравнения (2.1) относительно неизвестной φ_1. Необходимо установить, при каких значениях параметров δ и $\bar{\varepsilon}$ уравнение имеет решение $\varphi_1=\varphi_1^*=\mathrm{const}$, сколько этих решений и каков характер их устойчивости, т. е. неизвестными являются не только состояния равновесия маятника, но и область их существования. Одно решение уравнения (2.1), как отмечалось выше, известно заранее: если $\delta=0$ и $\bar{\varepsilon}=0$, то $\varphi_1^*=0$. Зафиксируем все параметры маятника, кроме $\bar{\varepsilon}$, и будем искать зависимости

$$\varphi_1^*=\varphi_1^*(\bar{\varepsilon})\,. \qquad (2.2)$$

По теореме о непрерывной зависимости решений гладкой динамической системы от параметра существует окрестность точки $\bar{\varepsilon}=0$, $\varphi_1^*=0$, непрерывным переходом из которой можно попасть в точку $\bar{\varepsilon}\neq 0$, $\varphi_1^*\neq 0$. Пусть пара чисел $\bar{\varepsilon}$, φ_1^* является решением уравнения (2.1). В пространстве величин $\bar{\varepsilon}$, φ_1^* совокупность таких пар образует кривую линию (L) – множество положений равновесия маятника.

Дуговую координату точек кривой (L) обозначим s. Параметризуем эту кривую собственной дуговой координатой

$$\varphi_1^*=\varphi_1^*(s)\,,\ \bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}(s)\,.$$

Тогда получаем выражение

$$f_1\left[\varphi_1^*(s),\bar{\varepsilon}(s)\right]\equiv 0\,.$$

Отсюда

$$\frac{\partial f_1}{\partial\varphi_1^*}\cdot\frac{d\varphi_1^*}{ds}+\frac{\partial f_1}{\partial\bar{\varepsilon}}\cdot\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}=0\,.$$

Обозначим $D=\dfrac{\partial f_1}{\partial\varphi_1^*}$. Если $D\neq 0$, то имеем выражение

$$\frac{d\varphi_1^*}{ds} = \frac{\Delta_1}{D},$$

где

$$\Delta_1 = -D\,\frac{d\overline{\varepsilon}}{ds},\quad D_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \overline{\varepsilon}}.$$

Таким образом, имеем формулу

$$\frac{d\varphi_1^*}{ds} = -\frac{D_1}{D}\cdot\frac{d\overline{\varepsilon}}{ds}. \tag{2.3}$$

Положим

$$\frac{d\overline{\varepsilon}}{ds} = \mu D. \tag{2.4}$$

Величину μ найдем из геометрического соотношения [15]

$$\left(\frac{d\varphi_1^*}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\overline{\varepsilon}}{ds}\right)^2 = 1. \tag{2.5}$$

Подставив (2.3), (2.4) в (2.5), получим:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{D^2 + D_1^2}}. \tag{2.6}$$

Выбор знака в (2.6) определяет направление перемещения вдоль кривой (L).

Таким образом, для определения ветвей кривой (L) необходимо решить следующую задачу Коши:

$$\frac{d\varphi_1^*}{ds} = -\frac{D_1}{\sqrt{D^2 + D_1^2}},\quad \frac{d\overline{\varepsilon}}{ds} = \frac{D}{\sqrt{D^2 + D_1^2}},\quad \varphi_1\big|_{s=0} = 0,\quad \overline{\varepsilon}\big|_{s=0} = 0. \tag{2.7}$$

Точки, в которых $D = 0$, являются точками мгновенной остановки изменения параметра $\overline{\varepsilon}$ вдоль (L). В них кривая (2.2) имеет вертикальную касательную, к таким точкам подходят две ветви кривой. Эти точки являются бифуркационными.

Примем следующие числовые значения параметров маятника: $\delta = 0$; $m_1 = 10$ кг; $l_1 = 0{,}5$ м; $c_1 = 400$ Н·м; $\mu_1 = 10$ Н·м·с. Результаты решения задачи Коши (2.7) для $c = 100$ Н·м и $P = 200$ Н показаны на рис. 1, 2 при различных значениях параметра k ориентации следящей силы $\vec{P}$ в случае мягких характеристик пружин, причем $\overline{b}_1 = 0{,}5$; $\overline{b}_1 = 0{,}25$. Сплошные кривые на обоих рисунках соответствуют значению $k = 0{,}7$. Штриховые кривые получены при $k = 0{,}5$ (рис. 1, *а*) и $k = 0{,}8$ (рис. 1, *б*). Точки бифуркаций B_1 и B_2 на рис. 1, *а* имеют следующие координаты: $\overline{\varepsilon} = 0{,}17202$; $\varphi_1 = -2{,}25647$ (для точки B_1); $\overline{\varepsilon} = 0{,}63163$; $\varphi_1 = 0{,}41716$ (для точки B_2). Для тех

значений линейного эксцентриситета ε следящей силы, которым соответствует безразмерное $\bar{\varepsilon}$, такое, что $|\bar{\varepsilon}| > 0,65$, имеем взаимнооднозначную зависимость (2.2), т. е. существует единственное невертикальное состояние равновесия маятника. Для малых значений $\bar{\varepsilon}$, а именно они являются практически реализуемыми, возможны три
(при k = 0,5 и k = 0,8) или пять (при k = 0,7) положений равновесия маятника, одно из которых вертикальное ($\varphi_1^* = 0$).

Таким образом, при плавном изменении линейного эксцентриситета ε следящей силы и прохождении бифуркационных точек в определенном направлении происходят скачкообразные переходы от одного состояния равновесия к другому – катастрофы состояний равновесия маятника.

Влияние параметра $\bar{b}_1$ при $\bar{b}_1 = 0,5$ и $k = 0,7$ иллюстрируют кривые на рис. 2. Кривая *1* построена при $\bar{b}_1 = 0,25$; кривая *2* – при $\bar{b}_1 = 0,5$.

3. Влияние типов характеристик упругих элементов на состояния равновесия маятника. Исследования показали, что лишь в случае пружин с мягкими характеристиками ($q_2 = q_{12} = 1$ и $q_1 = q_{11} = q_3 = q_{13} = 0$ в уравнении (1.3)) происходят бифуркации состояний равновесия маятника. В случаях жестких ($q_1 = q_{11} = 1$ и $q_2 = q_{12} = q_3 = q_{13} = 0$) и линейных ($q_3 = q_{13} = 1$ и $q_1 = q_{11} = q_2 = q_{12} = 0$) характеристик упругих элементов маятника зависимости (2.2) являются взаимнооднозначными:

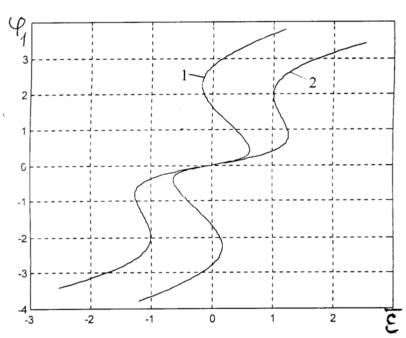


Рис. 2. **Кривые состояний равновесия маятника**

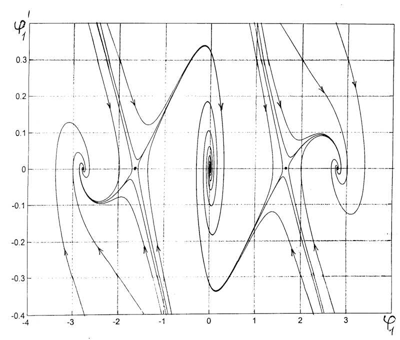


Рис. 3. **Фазовый портрет маятника**

каждому значению линейного эксцентриситета следящей силы отвечает единственное невертикальное (при $\bar{\varepsilon} \neq 0$) положение равновесия маятника. При этом чем больше значение $\bar{\varepsilon}$, тем больше угол φ_1^* отклонения маятника от вертикали.

Сравнительный анализ маятника показал, что при линейных характеристиках этот угол больше, чем при жестких характеристиках, что вполне согласуется с интуитивными соображениями. При варьировании параметра b_1, характеризующего спиральную пружину в шарнире *O*, было установлено, что увеличение или уменьшение b_1 приводит к изменению конфигурации кривой (2.2) таким образом, что для достаточно малых значений $\bar{\varepsilon}$ при $\bar{b}_1 = 0,05$ имеем три состояния равновесия маятника, при $\bar{b}_1 = 0,25$ их пять (рис. 1, *а*), а при $\bar{b}_1 = 0,5$ – лишь одно ($\varphi_1^* = 0$).

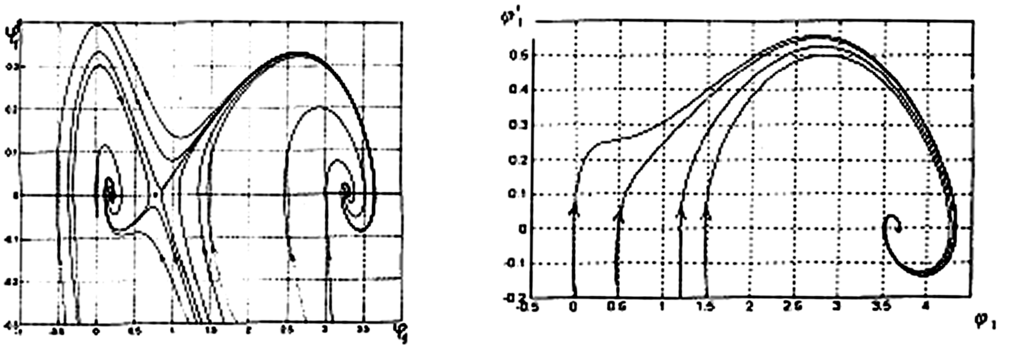
Параметр *b*, характеризующий горизонтальную пружину на верхнем конце маятника, не влияет на конфигурацию кривой (2.2).

4. Влияние ориентации следящей силы на бифуркации состояний равновесия маятника. Исследования показали, что параметр *k* ориентации следящей силы существенно влияет на конфигурацию равновесной кривой (2.2) и, соответственно, на количество бифуркационных точек. Хотя участки всех кривых на рис. 1, находящиеся в окрестности начала координат, мало отличаются друг от друга, сами кривые принципиально изменяются по мере удаления от начала координат. При *k* = 0,5 функция $\varphi_1(\bar{\varepsilon})$, начиная с некоторых значений $\bar{\varepsilon}$, становится монотонно убывающей: $d\varphi_1 / d\bar{\varepsilon} < 0$. Незначительное увеличение параметра *k* приводит к тому, что эти участки "разворачиваются" и уже при *k* = 0,8 (рис. 1, *б*) они превращаются в участки возрастания функции $\varphi_1(\bar{\varepsilon})$ (т. е. $d\varphi_1 / d\bar{\varepsilon} > 0$). Таким образом, с увеличением параметра ориентации следящей силы число бифуркационных точек при значениях $\bar{\varepsilon}$ линейного эксцентриситета, близких к нулю, изменяется от трех (при *k* = 0,5) до пяти (при *k* = 0,7) и снова к трем (при *k* = 0,8). Дальнейшее увеличение параметра ориентации ведет к тому, что бифуркационные явления смещаются в область больших значений $|\bar{\varepsilon}|$. При этом хотя бы одно состояние равновесия существует всегда.

Результаты, полученные методом продолжения по параметру [15], подтверждаются результатами непосредственного численного интегрирования уравнения (1.2) движения маятника. На рис. 3 показаны фазовые потоки, полученные для маятника с мягкими характеристиками упругих элементов при $\bar{b} = 0,5;\ \bar{b}_1 = 0,25;\ k = 0,7;\ \delta = 0;\ \varepsilon = 0$. В этом случае, согласно рис. 1, маятник имеет пять положений равновесия: два симметричных устойчивых фокуса ($\varphi_1^* \approx \pm 2,78$) и три седловых точки ($\varphi_1^*$ = 0 и $\varphi_1^* \approx \pm 1,71$). Для того же значения параметра ориентации следящей силы на рис. 4, *а* показаны фазовые потоки при $\bar{\varepsilon} = 0,5$.

Этому значению линейного эксцентриситета на кривой $\varphi_1^* = \varphi_1^*(\bar{\varepsilon})$ соответствуют три точки, которым на фазовой плоскости отвечают два устойчивых фокуса ($\varphi_1^* \approx 0,19$ и $\varphi_1^* \approx 3,3$) и седло ($\varphi_1^* \approx 0,74$). Фазовый портрет, представленный на рис. 4, *б,* получен при $\bar{\varepsilon} = 1$.

В этом случае система имеет единственное устойчивое положение равновесия $\varphi_1^* = 3,656$.



а *б*

Рис. 4. **Фазовые портреты математического маятника**

Выводы. В работе исследовано влияние углового эксцентриситета следящей силы на бифуркационные явления одиночного перевернутого маятника. Показано, что при плавном изменении линейного эксцентриситета следящей силы бифуркационные точки имеются лишь в случае мягких характеристик упругих элементов. Ориентация следящей силы существенно влияет на число и характер состояний равновесия маятника.

Представляет несомненный интерес анализ бифуркаций маятника в случае одновременного влияния линейного и углового эксцентриситетов следящей силы и возможность построения поверхности $\varphi_1^* = \varphi_1^*(\bar{\varepsilon}, \delta)$ бифуркационных точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лобас Л.Г.* Бифуркации стационарных состояний и периодических движений конечномерных динамических систем с простейшей симметрией (Обзор) // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 1. – С. 3 – 29.

2. *Лобас Л.Г., Ковальчук В.В., Бамбура О.В.* Эволюция состояний равновесия перевернутого маятника // Прикл. механика. – 2007. – **43,** № 3. – С. – 122 – 131.

3. *Лобас Л.Г., Лобас Л.Л.* Бифуркации, устойчивость и катастрофы состояний равновесия двойного маятника под воздействием асимметричной следящей силы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 4. – С. 139 – 149.

4. *Лобас Л.Г., Лобас Л.Л.* Влияние ориентации следящей силы на области устойчивости верхнего положения равновесия перевернутого двойного маятника // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 6. – С. 26 – 33.

5. *Лобас Л.Г., Лобас Л.Л.* Моделирование динамического поведения одномерного упругого тела при воздействии асимметричной следящей силы // Электронное моделирование. – 2002. – **24**, № 6. – С. 19 – 31.

6. *Jin J.-D., Matsuzaki Y.* Bifurcations in a two-degree-of freedom elastic system with follower forces // J.Sound and Vibr. – 1988. – **126,** N 2. – P. 265 – 277.

7. *Jin J.-D., Matsuzaki Y.* Stability and bifurcations of a double pendulum subjected to a follower force // AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC 30*th* Struktures, Structural Dynamics and Materials Conference, (Mobile, Ala, Apr. 3 – 5, 1989): Collect. Techn. Pap., Pt. 1. – Washington, 1989. – P. 432 – 439.

8. *Koval'chuk V.V., Lobas V.L.* Divergent Bifurcations of a Double Pendulum under the Action of an Asymmetric Follower Force // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 7. – P. 821 – 828.

9. *Lobas L.G.* Dynamic Behavior of Multilink Pendulum under Follower Forces // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 6. – P. 587 – 613.

10. *Lobas L.G.* Generalized Mathematical Model of an Inverted Multilink Pendulum with Follower Force // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 5. – P. 566 – 572.

11. *Lobas L.G., Koval'chuk V.V.* Influence of the Nonlinearity of the Elastic Elements on the Stability of a Double Pendulum with Follower Force // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 4. – P. 455 – 461.

12. *Lobas V.L.* Influence of the Nonlinear Characteristics of Elastic Elements on the Bifurcations of Equilibrium States of a Double Pendulum with Follower Forse // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 2. – P. 197 – 202.

13. *Matsuzaki Y., Futura S.* Condimension three bifurcation of a double pendulum subjected to a follower force with imperfection // AIAA Dyn. Spec. Conf., Long Beach, Calif., Apr. 5 – 6, 1990: Collect. Techn. Pap. – Washington (D.C.), 1990. – P. 387 – 394.

14. *Pflüger A.* Stabilitätsprobleme der Elastostatik. – Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer, 1950. – 339 s.

15. *Shinohara Y.A.* A geometric method for numerical solution of non-linear equations and its application to non-linear oscilations // Publ. RJMS, Kyoto Univ. – 1972. – **8**, N 1. – P. 13 – 42.

16. *Troger H., Steindl A.* Nonlinear stability and bifurcation theory. – Wien; New York: Springer-Verlag, 1991. – 407 p.

17. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing.-Arch. – 1952. – **20**, N 1. – S. 49 – 56.

18. *Ziegler H.* Linear elastic stability // ZAMP. – 1953. – **4**, N 2. – P. 89 – 121; **4**, N 3. – P. 167 – 185.

Поступила 21 сентября 2007 г.