УДК 517.9

Олександр Кільчинський
Володимир Скрипка

ПРО ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КАНОНІЧНИХ ОБЛАСТЕЙ З КУТОВОЮ ТОЧКОЮ

Класичний метод Фур'є дає можливість знаходити розв'язки крайових задач математичної фізики для областей, обмежених координатними лініями (поверхнями). Одержані в такий спосіб розв'язки мають вигляд рядів або невласних інтегралів, що швидко збігаються у внутрішніх точках області, але повільно при підході до межі. Ситуація значно ускладнюється за наявності на межі кутових точок. Проблеми, які при цьому виникають, розглянемо на прикладі задачі Неймана, теорії скалярного потенціалу для зрізаного параболоїда обертання (обмеженого координатними поверхнями $\xi = \xi_0$, $0 \le \eta \le \eta_0$ та $\eta = \eta_0$, $0 \le \xi \le \xi_0$ параболоїдальної системи $[1]$).

Розв'язком рівняння Лапласа в параболоїдальних координатах є інтеграл Ганкеля $[2]$:

$$\Phi(\xi;\eta) = \int_0^\infty \alpha(\tau) I_0(\tau\xi) J_0(\tau\eta)\tau d\tau\,, \tag{1}$$

у якому I_0, J_0 – функції Беселя першого роду від дійсного та уявного аргументів відповідно, $\alpha(\tau)$ – довільна функція параметра відокремлення τ.

Гармонійна функція (1) задовольняє умові повноти на поверхні $\xi = \xi_0$, $0 \le \eta < +\infty$ параболоїда.

У випадку, коли граничні умови задано на частині координатної поверхні $\xi = \xi_0$, $0 \le \eta \le \eta_0$, зручніше розшукувати розв'язок у вигляді ряду Фур'є–Беселя. Цей розв'язок можна отримати після формальної заміни у виразі (1) інтеграла Ганкеля зі щільністю $\alpha(\tau)$ на відповідний ряд із довільними сталими a_n:

$$\varphi_1(\xi;\eta) = \sum_{n=1}^\infty a_n I_0(\lambda_n \xi) J_0(\lambda_n \eta). \tag{2}$$

Загальний розв'язок для зрізаного параболоїда знаходиться у вигляді суми

$$\varphi(\xi;\eta) = \varphi_1(\xi;\eta) + \varphi_2(\xi;\eta), \tag{3}$$

де

$$\varphi_2(\xi;\eta)=\sum_{n=1}^{\infty} b_k I_0(s_k\eta)J_0(s_k\xi) \tag{4}$$

є гармонійною функцією, яка задовольняє умові повноти на поверхні $\eta=\eta_0$, $0\le\xi\le\xi_0$.

Константи відокремлення λ_n та s_k визначаються з умови

$$J_0(\lambda_n\eta_0)=J_0(s_k\xi_0)=0. \tag{5}$$

Виходячи з формули (3), на поверхні $\xi=\xi_0$, $0\le\eta\le\eta_0$ знайдемо нормальну похідну:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big|_{\xi=\xi_0}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_n I_1(\lambda_n\xi_0)J_0(\lambda_n\eta)-\sum_{n=1}^{\infty} b_k s_k I_0(s_k\eta)J_1(s_k\xi_0). \tag{6}$$

Підпорядкувавши цю похідну заданій умові

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big|_{\xi=\xi_0}=f(\eta)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n I_0(\lambda_n\eta), \tag{7}$$

де

$$f_n=\frac{2}{\eta_0^2 J_1^2(\lambda_n\eta_0)}\int_0^{\eta_0} f(\eta)J_0(\lambda_n\eta)\eta\, d\eta, \tag{8}$$

та замінивши сталі інтегрування за формулами

$$a_n\lambda_n\eta_0 I_0(\lambda_n\xi_0)J_1(\lambda_n\eta_0)=\alpha_n,\quad b_k s_k\xi_0 I_0(s_k\eta_0)J_1(s_k\xi_0)=\beta_k, \tag{9}$$

одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\xi_0\alpha_n=2\lambda_n\frac{I_0(\lambda_n\xi_0)}{I_1(\lambda_n\xi_0)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\lambda_n^2+s_k^2}+f_n. \tag{10}$$

Другу частину парної системи рівнянь (яка є наслідком виконання граничних умов на поверхні $\eta=\eta_0$, $0\le\xi\le\xi_0$) виводимо аналогічно у вигляді

$$\eta_0\beta_k=2s_k\frac{I_0(s_k\eta_0)}{I_1(s_k\eta_0)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\lambda_n^2+s_k^2}+\psi_k, \tag{11}$$

де ψ_k – відповідний коефіцієнт розкладення поверхневого навантаження.

Покладаючи у рівномірно збіжному ряді

$$\frac{I_1(\lambda_n\xi)}{I_0(\lambda_n\xi_0)}=\frac{2}{\xi_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2+s_k^2}\frac{J_1(s_k\xi)}{J_1(s_k\xi_0)}$$

$\xi=\xi_0$ і порівнюючи одержаний результат із співвідношенням (10), за умови, що $\lim f_n=0$ (необхідна умова збіжності ряду (7)), маємо:

$$\lim\alpha_n=\lim\beta_k=A=const. \tag{12}$$

Ці ж асимптотичні значення одержуємо з аналізу системи (11).

Знайдені відомості про асимптотичну поведінку констант α_n та β_k дають можливість, згорнувши асимптотичні складові ряду, подати парну систему рівнянь

(10), (11) у скінченому вигляді, а далі, покращуючи збіжності рядів (2) та (4), провести коректний числовий аналіз розв'язку (3).

Дослідимо поведінку одержаного розв'язку в околі кутової точки $(\xi_0;\eta_0)$. Враховуючи симетрію, обмежимось тільки розглядом функції $\varphi_1(\xi;\eta)$, яку у відповідності до співвідношень (2), (9) подамо у вигляді:

$$\varphi_1(\xi;\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\lambda_n\eta_0}\frac{I_0(\lambda_n\xi)}{I_0(\lambda_n\xi_0)}\frac{J_0(\lambda_n\eta)}{J_1(\lambda_n\eta)}. \qquad (13)$$

Можна показати, що ряд у формулі (13) збігається рівномірно при $\xi<\xi_0$ і умовно – при $\xi=\xi_0$. З цієї причини в кутовій точці $(\xi_0;\eta_0)$ функція має розрив і набуває різних значень залежно від того, по якій траєкторії точка $(\xi;\eta)$ наближається до кутової.

Оскільки при диференціюванні функціональних рядів їх збіжність, як правило, погіршується, цікаво також дослідити поведінку частинних похідних розв'язку.

З формули (13) маємо:

$$\frac{\partial\varphi_1(\xi;\eta)}{\partial\xi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\eta_0}\frac{I_1(\lambda_n\xi)}{I_0(\lambda_n\xi_0)}\frac{J_0(\lambda_n\eta)}{J_1(\lambda_n\eta_0)}. \qquad (14)$$

Використовуючи асимптотичні співвідношення для функцій Беселя при $x\to\infty$:

$$I_\nu(x)\sim\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\ ;\ J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right), \qquad (15)$$

і враховуючи, що $\lambda_n\eta_0\sim \mathrm{n}\pi-\frac{\pi}{4}$ при $n\to\infty$, вилучимо асимптотичну складову ряду (14) у вигляді

$$\left(\frac{\partial\varphi_1(\xi;\eta)}{\partial\xi}\right)^*=\frac{A}{\eta_0}\sqrt{\frac{\xi_0\eta_0}{\xi\eta}}e^{-\frac{p}{4}}\left\{s_1\sin\frac{q}{4}-s_2\cos\frac{q}{4}\right\}, \qquad (16)$$

де

$$s_1=\sum_{n=1}^{\infty}e^{np}\cos nq\ ;\ s_2=\sum_{n=1}^{\infty}e^{np}\sin nq\ ; \qquad (17)$$

$$p=\pi\frac{\xi-\xi_0}{\eta_0}\ ;\ q=\pi\frac{\eta-\eta_0}{\eta_0}. \qquad (18)$$

Введемо допоміжний комплекснозначний ряд

$$s=s_1+is_2=\sum_{n=1}^{\infty}e^{n(p+iq)}=\frac{e^{p+iq}}{1-e^{p+iq}}\qquad (\ p<0\ ). \qquad (19)$$

Суми рядів (17) знайдемо, відокремлюючи дійсну та уявну частини у виразі (19):

$$s_1=\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}\frac{\cos q-e^p}{ch\,p-\cos q}\ ;\ s_2=\operatorname{Im}s=\frac{1}{2}\frac{\sin q}{ch\,p-\cos q}. \qquad (20)$$

Повертаючись до співвідношення (16) і враховуючи формули (20), одержуємо:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1(\xi;\eta)}{\partial \xi}\right)^* = \frac{A}{\eta_0}\sqrt{\frac{\xi_0\eta_0}{\xi\eta}}e^{-\frac{p}{4}}\frac{e^p \sin\frac{q}{4} + \sin\frac{3q}{4}}{2(\cos q - ch\, p)}. \tag{21}$$

Переходячи до границі при $\xi \to \xi_0$ $(p \to 0)$ та $\eta \to \eta_0$ $(q \to 0)$, маємо:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1(\xi;\eta)}{\partial \xi}\right)^*\Bigg|_{\substack{\xi\to\xi_0\\ \eta\to\eta_0}} \sim -\frac{A}{\eta_0}\frac{q}{q^2+p^2} = \frac{A}{\pi}\frac{\eta_0-\eta}{(\xi_0-\xi)^2+(\eta_0-\eta)^2} = \frac{A}{\pi}\frac{\sin\theta}{\rho}, \tag{22}$$

де ρ і $\theta-$полярні координати точки $M(\xi';\eta')$ (рис. 1).

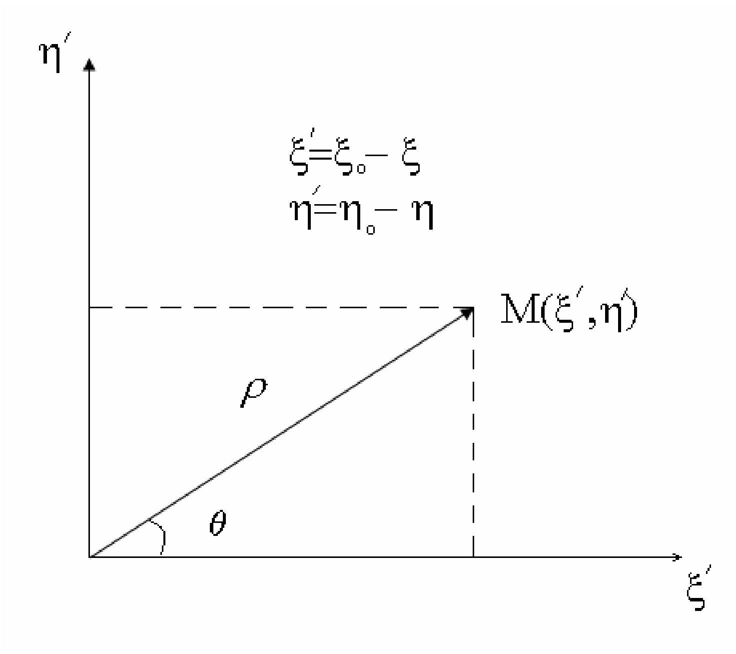

Рис. 1

Аналогічно для другої складової розв'язку (3) одержуємо

$$\left(\frac{\partial \varphi_2(\xi;\eta)}{\partial \xi}\right)^*\Bigg|_{\substack{\xi\to\xi_0\\ \eta\to\eta_0}} = -\frac{A}{\pi}\frac{\sin\theta}{\rho}. \tag{23}$$

З формул (22) і (23) видно, що частинні похідні кожної складової розв'язку в кутовій точці мають степеневі особливості, які в сумі взаємознищуються.

Таким чином, на прикладі задачі Неймана встановлено, що як сам загальний розв'язок $\varphi(\xi;\eta)$, так і його частинні похідні першого порядку, а отже, і градієнт всюди в області (включно з кутовою точкою) не мають особливостей, тобто приймають скінчені значення.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Маделунг Е.* Математический аппарат физики. – М.: Наука, 1968. – 618 с.
2. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 1979. – 263 с.

Надійшла 2 жовтня 2007 р.