

УДК 539.3

Антоніна Одинець

ЦЕНТР ЗГИНУ ТОНКОСТІННОГО СТЕРЖНЯ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ

У тонкостінних стержнях відкритого профілю має місце особлива точка перерізу – центр згину. Коли зовнішнє навантаження буде проходити через цю точку, тоді тонкостінний стержень відкритого профілю не буде випробовувати небажане кручення, а тільки згин. Положення центра згину залежить від геометричних параметрів стержня. Існує декілька способів визначення положення цієї особливої точки. Скористаємось для знаходження її секторальними площинами. Для цього запишемо умови статичної еквівалентності відносно шуканого центра згину (точка А на рис. 1). Тоді отримаємо такі вирази:

$$\int_s q_y ds \cdot \rho_A = 0, \quad \int_s q_z ds \cdot \rho_A = 0,$$

де ρ_A – плече елементарного динамічного потоку $q_z ds$ і $q_y ds$ відносно центра згину.

Враховуємо значення дотичних потоків q_y і q_z відповідно за формулою

Журавського: $q_y = \frac{Q_y \cdot S_z}{I_z}$; $q_z = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y}$.

Тоді отримаємо: $\int_s \frac{Q_y \cdot S_z}{I_z} \cdot \rho_A ds = 0$; $\int_s \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y} \cdot \rho_A ds = 0$.

Виносимо за знак інтеграла сталі величини для даного перерізу:

$$\frac{Q_y}{I_z} \cdot \int_s S_z \cdot \rho_A ds = 0 ; \frac{Q_z}{I_y} \cdot \int_s S_y \cdot \rho_A ds = 0.$$

Тому, що $\frac{Q_y}{I_z} \neq 0$ і $\frac{Q_z}{I_y} \neq 0$,

тоді

$$\int_s S_z \cdot \rho_A ds = 0 ; \int_s S_y \cdot \rho_A ds = 0. \tag{1}$$

У цих виразах S_z і S_y – статичні моменти відносно головних центральних осей.

© *Одинець А.А., 2007*

Величина $\rho_A ds$, що входить у підінтегральні вирази, є подвійною площиною елементарного сектора, що заштрихований на рис. 1. Ця елементарна площина має назву секторальної площини, чи секторальної координати A . Позначимо її таким чином: $\rho_A ds = d\omega_A$.

Тоді вирази (1) приймають вигляд:

$$\int_s S_z \cdot d\omega_A = 0; \int_s S_y \cdot d\omega_A = 0. \quad (2)$$

Ці вирази можливо записати так:

$$\int_s y \cdot dA \cdot d\omega_A = 0; \int_s z \cdot dA \cdot d\omega_A = 0.$$

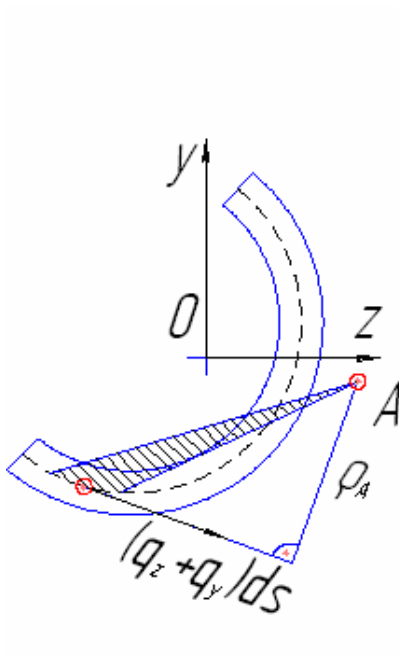


Рис. 1

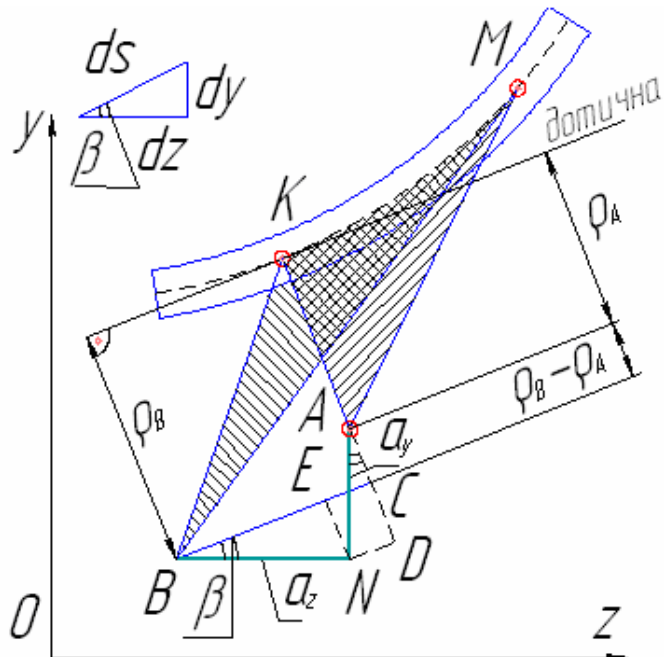


Рис. 2

Використовуємо інтегрування по частинам на підставі відомої з курсу математики формули: $\int u dv = uv - \int v du$.

Нехай $u = \int y dA$, $du = y dA$ чи $u = \int z dA$, $du = z dA$ і $dv = d\omega_A$,

тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \omega_A \cdot \int_s y dA - \int_s \omega_A \cdot y dA &= 0, \\ \omega_A \cdot \int_s z dA - \int_s \omega_A \cdot z dA &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Перші складові у цих виразах являють собою статичні моменти відносно осей y і z , що є головними осями. Отже, $S_z = 0$, $S_y = 0$.

Тоді отримаємо такі умови:

$$\int_s y \cdot \omega_A \cdot dA = 0, \int_s z \cdot \omega_A \cdot dA = 0. \quad (4)$$

Але тут $dA = t \cdot ds$ (t – товщина перерізу), тоді отримуємо вирази:

$$\int_s y \cdot \omega_A \cdot t \cdot ds = 0, \int_s z \cdot \omega_A \cdot t \cdot ds = 0. \quad (5)$$

Рівність (5) є тими умовами, які дають змогу визначити координати центра згину.

Аналогічно тому, як при центрі ваги перерізу обирається довільна вісь і від неї обчислюється відстань до центра осі, так і тут обирається довільний полюс B і знаходиться положення центра згину відносно центра полюса. Положення центра згину визначається відрізками a_z і a_y (рис. 2). Для знаходження цих відрізків позначимо на середній лінії профілю початкову точку відліку дуг (точку K) і елементарну її ділянку $ds = KM$. Проведемо дотичну до середньої лінії у обраної точці і позначимо β , кут нахилу її до осі z .

Для полюса B і центра A при побудові отримаємо дві елементарні секторальні площини (рис. 2):

$$d\omega_B = \rho_B \cdot ds, \quad d\omega_A = \rho_A \cdot ds.$$

Зв'язок між диференціалами цих площин має вигляд:

$$d\omega_B - d\omega_A = (\rho_B - \rho_A) ds \quad (6)$$

На рис. 2 бачимо, що $\rho_B - \rho_A = AD - CD = AD - EN = a_y \cdot \cos \beta - a_z \cdot \sin \beta$.

$$\text{Але } \frac{dy}{ds} = \sin \beta; \quad \frac{dz}{ds} = \cos \beta$$

Тоді отримаємо $\rho_B - \rho_A = a_y \frac{dz}{ds} - a_z \frac{dy}{ds}$.

Таким чином, різниця диференціалів секторальних площин (6) приймає вигляд:
 $d\omega_B - d\omega_A = a_y dz - a_z dy$.

Після інтегрування отриманого виразу з додаванням довільної сталої C будемо мати рівність:

$$\omega_A - \omega_B = a_y z + a_z y + C. \quad (7)$$

Підставляємо це значення секторальної площини, що відповідає шуканому центру згину, у вираз (4):

$$\int_A \omega_B y dA - a_y \int_A z y dA + a_z \int_A y^2 dA + C \int_A y dA = 0,$$

$$\int_A \omega_B z dA - a_y \int_A z^2 dA + a_z \int_A y z dA + C \int_A z dA = 0.$$

Тому що осі z і y – головні центральні відкритого профілю, тоді:

$$I_{zy} = \int_A z y dA = 0; \quad S_z = \int_A y dA = 0; \quad S_y = \int_A z dA = 0.$$

Звідси:

$$a_z = -\frac{\int \omega_B y dA}{I_z},$$

$$a_z = \frac{\int \omega_B z dA}{I_y}$$
(8)

Чи

$$a_z = -\frac{\int \omega_B y t ds}{I_z},$$

$$a_z = \frac{\int \omega_B z t ds}{I_y}.$$
(9)

За цими формулами і визначають відрізки, які слід відкласти від полюса B , і напрямку координатних осей з урахуванням їх знаків, щоб знайти положення центра згину.

При визначенні секторальних площин слід мати на увазі, що вони є функціями дуги S , залежать від початку відліку відстаней і положення полюса B . Необхідно правильно визначити знак секторальних площин. Цей знак встановлюється за допомогою рухомого променя. При обертанні рухомого променя від початкової точки відносно полюса B за ходом годинникової стрілки прирощення секторальної площини має знак плюс, проти годинникової стрілки – мінус.

Зміну значень секторальних площин уздовж середньої лінії профілю зручно представляти у вигляді епюри ω_B . Тоді інтеграли у чисельник отриманих формул (8 і 9) можливо обчислити шляхом перемноження епюр $\omega_B \cdot yt \cdot zt$. Ці перемноження можна виконати на підставі правил Верещагіна і Сімпсона-Корноухова.

Вибір полюса для побудови епюри секторальних площин довільний. Однак його рекомендується обирати так, щоб відповідні епюри були простішими. Для зменшення обчислювальної роботи рекомендується початковий полюс обирати на середній лінії відкритого профілю. Коли переріз має ось симетрії, тоді початковий полюс раціонально обрати на цій осі. На завершення приведемо послідовність визначення положення центра згину.

1. Визначення центра тяжіння поперечного перерізу.
2. Визначення головних центральних моментів інерції I_z, I_y .
3. Вибір початкового полюса B .
4. Побудова епюр yt, zt, ω_B .
5. Перемноження епюр ω_B і yt , ω_B і zt . Використовування правил Верещагіна і Сімпсона – Корноухова.
6. Визначення координат центра згину a_z і a_y .
7. Контроль обчислення координат a_z і a_y .

ЛІТЕРАТУРА

1. *Одинец А.А.* Изгиб и кручение тонкостенных стержней. – Киев: КВВАИУ, 1983. – 123 с.
2. *Одинец А.А.* Опір матеріалів. ЧП.–Київ: КІВПС, 2000. – 219 с.
3. *Писаренко Г.С. и др.* Сопротивление материалов. – Киев: Вища школа, 1986. – 775 с.

Надійшла 24 вересня 2007 р.