УДК 625

Ольга Бамбура

ВИКОРИСТАННЯ ПЕРЕХІДНИХ КРИВИХ ПРИ БУДІВНИЦТВІ ЗАЛІЗНИЦЬ

Залізничному транспорту належить провідна роль у перевізних процесах України. Залізниця пов'язує в єдине ціле всі області та райони країни, забезпечує потреби населення державних та комерційних організацій у перевезеннях. Від якості колії залежить безпека та швидкість руху. Особливу роль у взаємодії колії та рухомого складу відіграє перехідна крива, яка забезпечує плавність переходу від прямолінійної ділянки колії до кругової. В даній роботі розглядається використання математичних кривих як перехідні.

Железнодорожному транспорту принадлежит ведущая роль в перевозочных процессах Украины. Железная дорога связывает в единое целое все области и районы страны, обеспечивает потребности населения государственных и коммерческих организаций в перевозках. От качества пути зависит безопасность и скорость движения. Особую роль во взаимодействии пути и подвижного состава играет переходная кривая, которая обеспечивает плавность перехода от прямолинейного участка пути к круговому. В данной работе рассматривается использование математических кривых в качестве переходных.

Rail transport plays a leading role in the transport processes in Ukraine. Rail links into the whole area and all areas of the country, provides the necessities of the population of state and commercial organizations in traffic. The quality of track depends on the safety and speed. Special role in the interaction of track and rolling stock has a transition curve that ensures smooth transition from straight track to a circular area. In this paper the use of mathematical curves as a transitional.

Ключові слова: перехідна крива, кругова крива, кубічна парабола, клотоїда.

Швидкість перевезень – головна мета транспортної політики, яка успішно реалізується у багатьох європейських країнах. На даному етапі розвитку залізничного транспорту в Україні проводиться посилена робота з модернізації залізничних ліній для введення швидкісного руху поїздів [1]. При будівництві залізниць враховуються всебічні теоретичні та експериментальні дослідження, економічні обґрунтування, питання комфортабельності та безпеки перевезення пасажирів і реальність економії від капітальних витрат. У цьому аспекті важливо зважити і глибоко проаналізувати всі фактори, що дозволяють знайти шляхи до підвищення швидкостей. Одним з таких факторів є геометричні параметри криволінійних ділянок залізничних ліній. Адже такі параметри як величина і форми перехідних кривих істотно впливають на впровадження високих швидкостей. Наявність криволінійних ділянок спонукає машиністів на деяких перегонах значно знижувати швидкість руху .

Основна задача перехідних кривих полягає в забезпеченні вимоги неперервної зміни кривизни траєкторії від прямої ділянки до кривої і плавного зростання відцентрової сили в зоні переходу рухомого складу з прямої ділянки колії на криву [2]. Якщо прямолінійна ділянка траєкторії в точці *O* безпосередньо переходить в кругову траєкторію радіуса R_0, то кривизна траєкторії в точці *O* змінюється стрибком (рис. 1).

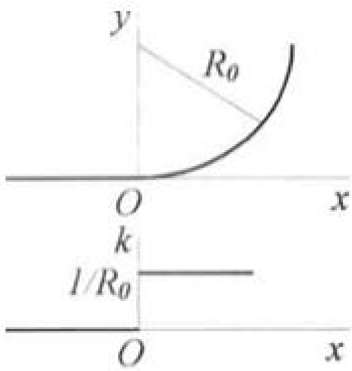

Рис. 1. **Зміна кривизни траєкторії точки при переході з прямої ділянки на кругову**

Це призводить до того, що й відцентрова сила змінюється стрибком. Якщо екіпаж моделювати (в певному наближенні) матеріальною точкою маси *m,* яка рухається зі швидкістю *V* вздовж траєкторії, радіус кривизни якої в даній точці є R, то в системі координат, незмінно зв'язаній з екіпажем, має певний сенс ввести умовну силу $F = \dfrac{mV^2}{R}$, яка дістала назву відцентрової сили. Ця сила також змінюється стрибком від нульового значення на прямолінійній ділянці до значення $F_0 = \dfrac{mV^2}{R_0}$ на круговій ділянці (рис. 2). Це спричиняє різкий і сильний поштовх, шкідливий як для екіпажу, так і для верхньої будови колії.

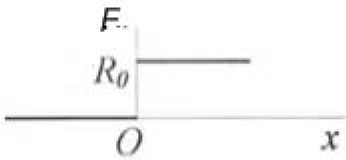

Рис. 2. **Зміна відцентрової сили при переході з прямої ділянки на кругову**

Щоб уникнути цього, прямолінійну ділянку сполучають з круговою за допомогою кривої *OM*, вздовж якої радіус R кривизни поступово зменшується від нескінченного значення в точці *O* стику з прямолінійною ділянкою до величини радіуса R_0 кола в точці M стику з дугою кола. Така крива і називається перехідною кривої (рис. 3).

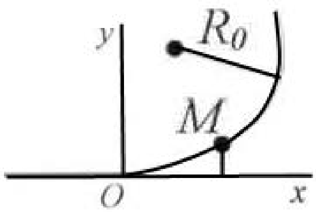

Рис. 3. **Схематичне зображення перехідної кривої**

Приймемо такі позначення (рис. 4):

К – довільна точка перехідної кривої;

$S = \overset{\cup}{OK}$ дугова координата точки *К;*

x,y – Декартові прямокутні координати точки *К;*

Q – центр кривизни перехідної кривої в точці *К;*

θ– кут повороту перехідної кривої в точці *К* (він же є і курсовим кутом);

$L = \overset{\cup}{OM}$ – довжина перехідної кривої;

N – центр кола радіуса R_0, яке з'єднується з перехідною кривою.

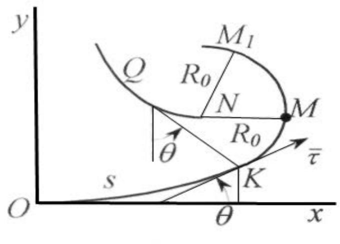

Рис. 4.

При цьому кутом повороту кривої в точці *К* називається кут повороту дотичної до кривої в точці *К* при зміщенні вздовж кривої від початкової точки до точки *К*.

Оскільки далі як початкова точка виступає точка O стику перехідної кривої з прямолінійною ділянкою, дотична до якої (тобто до перехідної кривої) горизонтальна, то кут повороту кривої дорівнює куту θ нахилу кривої до осі абсцис.

На даний час добре вивчені властивості багатьох математичних кривих, які можуть бути використані в якості перехідних кривих. Розглянемо більш детально дві з них: кубічну параболу, клотоїду.

Найперший докладний, ґрунтовний математичний аналіз перехідних кривих для залізничних трас виконаний Г.В. Ельфімовим [4]. Детальний сучасний огляд перехідних кривих залізничної колії зробив В.В. Лагута [5].

Перевагами ***кубічної параболи*** як перехідної кривої є простота технічних формул. Вона звичайно використовується на залізничних магістралях.

Розглянемо рівняння:

$$y = \frac{x^3}{6c} \quad . \tag{1}$$

Із загальної формули для радіуса кривизни кривої лінії

$$R = \frac{\sqrt{(1 + y_x'^2)^3}}{\left| y''_{x^2} \right|} \tag{2}$$

На підставі (2) отримуємо:

$$R = \frac{c}{x}\sqrt{\left(1 + \frac{x^4}{4c^2}\right)^3} \tag{3}$$

Лише при дуже малих значеннях x порівняно з параметром c можна відзначити що:

$$R \approx \frac{c}{x}$$

Саме ця наближена рівність широко застосовується при трасуванні місцевості для розбивки залізничних магістралей.

Довжина дуги:

$$s = \int \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx \quad ; \tag{4}$$

для кубічної параболи (1) має вигляд:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^4}{4c^2}}\, dx \quad . \tag{5}$$

З рівності (5) випливає $s \approx x$, тобто

$$Rs = c \quad . \tag{6}$$

Оскільки функція $R(s)$ для кубічної параболи не виражається в скінченному вигляді, то тим більше такою ж буде і функція $\theta(s)$:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} \quad . \tag{7}$$

Із (6) маємо:

$$R \approx \frac{c}{s}$$

Тому

$$d\theta \approx \frac{s}{c}ds, \qquad \theta \approx \frac{s^2}{2c} \approx \frac{x^2}{2c}\ . \tag{8}$$

Отриманий наближений вираз функції $\theta(s)$ узгоджується з її точним виразом

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{2c}\ . \tag{9}$$

Кубічна парабола в початку координат дотикається осі абсцис і має нульову кривизну:

$$y'_x\big|_{x=0} = 0, \qquad R\big|_{x=0} = +\infty\ .$$

При зростанні абсцис x точок кубічної параболи кривизна $k = \dfrac{1}{R}$ спочатку збільшується, а потім зменшується тобто функція $R(x)$ має мінімум R' при x'.

У точці x' кут повороту кубічної параболи (1) становить

$$\theta' = \operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 24^\circ 06'\ .$$

Таким чином кубічну параболу як перехідну криву доцільно застосовувати при кутах повороту, які не перевищують $\approx 24^\circ 06'$

Найбільшого поширення набула ***клотоїда***, яка являє собою спіраль, що поступово закручується.

Клотоїда – плоска трансцендентна крива, натуральне рівняння якої має вигляд:

$$Rs = c\ . \tag{10}$$

Для параметра c натурального рівняння клотоїди з рис.4 і рівняння (10) одержуємо значення $c = R_0 L$, тобто радіус R клотоїди в точці з дуговою координатою s зв'язаний з радіусом R_0 кола, що з'єднується з клотоїдою, і довжиною клотоїди співвідношенням:

$$Rs = R_0 L\ .$$

Якщо систему координат вибрати так, щоб клотоїда дотикалась осі абсцис в початку координат і відлік довжин дуг вести від початку координат, то із (7) і (10) інтегруванням знаходимо

$$\theta = \frac{s^2}{2c}\ . \tag{11}$$

Використаємо формули диференціальної геометрії:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\theta\ . \tag{12}$$

Звідси маємо:

$$\frac{dy}{dx} = tg\theta$$

Підставивши (11) в (12), одержуємо диференціальні рівняння клотоїди, в яких незалежною зміною є дугова координата s точок:

$$\frac{dy}{ds} = \cos\frac{s^2}{2c}, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\frac{s^2}{2c}. \qquad (13)$$

Проінтегруємо систему (13). З описаного вище вибору системи декартових координат випливають такі початкові умови:

$$x\big|_{s=0} = 0, \qquad y\big|_{s=0} = 0 \qquad (14)$$

Задача Коші (13) – (14) має розв'язок

$$x = \int_0^s \cos\frac{s^2}{2c} ds, \qquad y = \int_0^s \sin\frac{s^2}{2c} ds \qquad (15)$$

Якщо в (18) ввести змінну інтегрування θ замість змінної s, скориставшись залежністю між ними (11) і співвідношеннями

$$s = \sqrt{2c\theta}, \qquad ds = \frac{c}{s} d\theta = \sqrt{\frac{c}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}},$$

то отримаємо параметричні рівняння клотоїди, в яких параметром виступає кут θ:

$$x = \sqrt{\frac{c}{2}} \int_0^\theta \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}} d\theta, \qquad y = \sqrt{\frac{c}{2}} \int_0^\theta \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}} d\theta\ . \qquad (16)$$

Інтеграли (15) і (16) не виражаються в скінченному вигляді через елементарні функції, але їхні значення відомі для $\theta = +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\ \theta}{\sqrt{\theta}} d\theta = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

При $\theta \in [0, +\infty)$ клотоїда виходить з початку координат, дотикаючись у ньому осі *Ox,* а потім асимптотично обвивається навколо точки $A\left(\frac{\sqrt{\pi c}}{2}, \ \frac{\sqrt{\pi c}}{2}\right)$, нескінченну кількість обертів. Крива симетрична відносно початку координат, який являє собою точку перегину, тому точка *B* координати: $x_B = -\frac{\sqrt{\pi c}}{2}, \qquad y_B = -\frac{\sqrt{\pi c}}{2}$ (рис. 5) .

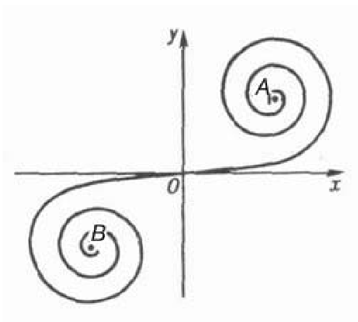

Рис. 5. **Клотоїда**

Представимо рівняння (15) і (16) у вигляді степені рядів, знаки членів яких чергуються і які збігаються на всій числовій осі:

$$\begin{cases} x = s\left(1 - \dfrac{s^4}{40c^2} + \ldots\right), \\ y = \dfrac{s^3}{6c}\left(1 - \dfrac{s^4}{56c^2} + \ldots\right); \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2c\theta}\left(1 - \dfrac{\theta^2}{5\cdot 2!} + \ldots\right), \\ y = \dfrac{\sqrt{2c}}{3}\theta\left(1 - \dfrac{\theta^2}{7\cdot 2!} + \ldots\right) \end{cases} . \quad (18)$$

У геодезичній практиці трасування доріг використовується початкова дуга клотоїди довжиною L з максимальним кутом повороту $\theta_{\max} = \dfrac{L^2}{2c}$.

Ці дві криві при дуже малих кутах повороту дуже близькі між собою. Зі збільшенням полярного кута φ довжина кубічної параболи зростає швидше, ніж довжина клотоїди. Радіус кривизни найшвидше зменшується у клотоїди і найповільніше – кубічної параболи [3].

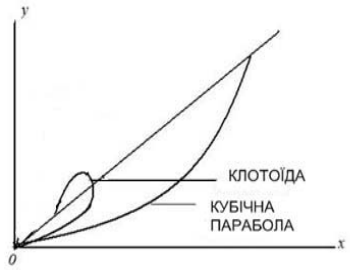

Рис. 6.

Практично всі види перехідних кривих можуть застосовуватися при трасуванні, але завжди з дотриманням нормативних вимог безпеки та зручності руху. Саме остання обставина вимагає скрупульозного аналізу застосовування кривої в кожному конкретному випадку.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Кірпа Г. М.* Інтеграція залізничного транспорту України у європейську транспортну систему: Монографія. – Д.: Видавництво Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2004. – 248 с.

2. *Даніленко Е. І.* Залізнична колія / Улаштування, проектування і розрахунки, взаємодія з рухомим складом / Підручник для вищих навчальних закладів (у 2-х томах). – Київ: Інпрес, 2010. – Том 1. –528 с.
3. *Мартынюк А. А., Лобас Л. Г.,. Никитина Н. В.* Динамика и устойчивость движения колесных транспортных машин. – Киев: Техника, 1981. – 223 с.
4. *Ельфимов Г.В.* Теория переходных кривых. – М.: Трансжелдориздат, 1948.
5. *Лагута В .В.* Совершенствование проектирования кривых железнодорожного пути в плане/ Автореферат диссертации на соискан. степени канд. техн. наук. – Днепропетровск, ДИИТ, 2002.