

Аналіз виконаний для двомірної моделі і рішення розгалуженої тріщини отримано шляхом інтегрування функції Гріна, що відповідає дислокації поблизу тріщини. Щоб апроксимувати існування вільної поверхні, застосоване тут дислокаційне рішення віднесене до дислокацій у півпросторі.

**Аналіз розгалуження тріщин.** Досліджуваний аналітичний апарат ґрунтується на формулюванні у комплексних змінних [5] плоскої пружнопластичної задачі. А саме, внутрішні напруження і переміщення в пружному тілі виражаються через дві комплексні аналітичні функції  $\Phi$  та  $\psi$  так:

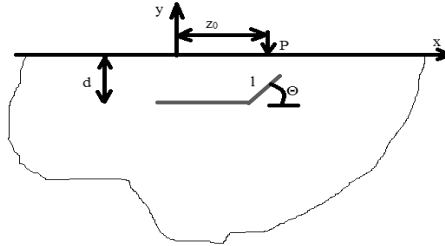


Рис. 1. Розгалужена приповерхнева тріщина від впливу навантаження на поверхню

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \cdot [\Phi(z) + \bar{\Phi}(z)]; \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\psi}(z); \quad (2)$$

$$2 \cdot \mu(u_x + iv_y)' = k\Phi(z) - \bar{\Phi}(z) - z\bar{\Phi}'(z) - \bar{\psi}(z), \quad (3)$$

де  $z = x + iy$ ;  $\mu$  – модуль зсуву;  $k = 3 - 4\nu$  – для плоскодеформованого стану, або  $k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$  – для плосконапруженого стану ( $\nu$  – коефіцієнт Пуассона); риска над символом означає комплексно-спряжене число.

Поле напружень у тілі можна визначити, знайшовши комплексні функції  $\Phi$  та  $\psi$ , поведінка яких в особливих точках і на границях відповідає умовам даної задачі. А саме, комплексні потенціали, які відповідають зосередженому зусиллю, що діє на поверхню півпростору в точці  $x_0$ , можна виразити через один потенціал  $\Phi_F$  наступним чином:

$$\Phi_F(z) = -\frac{P}{z - x_0}, \quad (4)$$

де  $P = \frac{p_x + ip_y}{2x}$ , де в свою чергу  $p_x$  та  $p_y$  являють собою складові прикладеного навантаження по осям  $x$  та  $y$  відповідно. Цей потенціал був виведений при допомозі аналітичного продовження [5], а відповідні напрями слід визначати, застосовуючи замість (2) наступне модифіковане співвідношення:

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \bar{\Phi}(z) - (z - z') \cdot \bar{\Phi}'(z). \quad (5)$$

Аналогічно комплексний потенціал, що відповідає особливостям дислокаційного типу в на півплощині, можна виразити у вигляді

$$\Phi_D(z) = \begin{cases} \Phi_d(z), \text{Im}(z) < 0, \\ -\Phi_d(z) - z\Phi'_d(z) - \psi_d(z), \text{Im}(z) > 0, \end{cases} \quad (6)$$

де 
$$\Phi_d(z) = \frac{\alpha}{z - z_0}; \quad (7)$$

$$\psi_d(z) = \frac{\bar{\alpha}}{z - z_0} + \frac{\bar{z}_0 \alpha}{(z - z_0)^2}. \quad (8)$$

Символ  $Im$  – образ, означає результат відображення, а потенціали  $\Phi_d$  та  $\psi_d$  відповідають дислокаційній особливості всієї площини, розташованій в точці  $z_0$  при

$$\alpha = \frac{2\mu \cdot [u_x + iv_y] \cdot e^\theta}{i\pi \cdot (k+1)},$$

причому член у квадратних дужках являє собою стрибок

переміщень, викликаних сингулярністю (*сингулярність* – присутність у даного математичного об'єкта тих чи інших неправильностей у порівнюванні із регулярними об'єктами того ж роду).

Наступний етап аналізу включає в себе обчислення внутрішніх напружень, які діють вздовж тріщини і обумовлені присутністю наведених вище сингулярних рішень, а також визначення додаткового потенціалу, який забезпечував би відповідність сумарних поверхневих зусиль тертя граничним умовам на поверхні околиць тріщини. Ці граничні умови для околиць головної тріщини вибрані за допомогою простої моделі Мора-Кулона:

$$\tau_{xy} = \pm \eta \sigma_{yy}, \quad (9)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт тертя, а потрібний знак у рівнянні (9) приймається у відповідності із знаком прикладеного дотичного напруження.

Із рис. 1 видно, що вздовж головної тріщини  $z = x - id$  при  $|x| \leq c$ . Напруження вздовж цієї лінії, наприклад  $\sigma_{yy}^0 - i\tau_{xy}^0$ , обумовлені дислокацією і зосередженим навантаженням на поверхню, можна обчислити безпосередньо, використовуючи виведені вище формули для потенціалів і напружень. Це дасть результат в наступній формі:

$$\sigma_{yy}^0 - i\tau_{xy}^0 = (\sigma_{yy} - i\tau_{xy})_{\Phi_D} + (\sigma_{yy} - i\tau_{xy})_{\Phi_F}, \quad (10)$$

Причому члени у правій частині рівняння являють собою напруження від вказаних потенціалів.

Вводячи додатковий потенціал  $\Phi_B$ , як такий, що задовольняє граничну умову, тобто умову (9), вздовж головної тріщини, отримаємо наступний вираз

$$(\sigma_{yy} - i\tau_{xy})_{\Phi_B} = i \cdot (\tau_{xy}^0 \pm \eta \cdot \sigma_{yy}^0) \quad \text{на лінії } z = x - id. \quad (11)$$

Права частина рівняння (11) – це вже відома функція, визначена із залежності (10), так що необхідно підібрати такий підходящий вираз для  $\Phi_B$ , щоб задовольнити рівняння (11). Можна показати, що задача знаходження додаткового потенціалу  $\Phi_B$

за виразами для його граничних напружень зводяться до розв'язку задачі Гілберта [5]:

$$\Phi_{B^+}(x) + \Phi_{B^-}(x) = f(x), \quad |x| < c \quad (12)$$

де  $f(x)$  – відома функція, а у нашому випадку її можна ототожнити із правою частиною рівняння (11). Рішення цієї задачі є відомим [5] і може бути записаним у вигляді

$$\Phi_B(z) = \frac{X(z)}{2\pi \cdot i} \int_{-c}^c \frac{f(x)dx}{X^+(x) \cdot (x-z)} + CX(z). \quad (13)$$

Функція  $X(z)$  являє собою рішення однорідної задачі, і у даному випадку вона має наступний вигляд:

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}}, \quad (14)$$

де  $C$  – константа, яку приймають таким чином, щоб отримати належну поведінку функції на нескінченності.

Підставляючи потенціали, які визначені в рівняннях (4) та (6)...(8), у вираз (13), застосовуючи співвідношення (5), (10), (11) та виконуючи необхідне інтегрування по контуру, отримуємо остаточний вираз для потенціалу  $\Phi_B$ :

$$\begin{aligned} \Phi_B(z) = & (\bar{\alpha}\delta - \alpha\gamma) \cdot [F(z; z_0 - z_1) - F(z; \bar{z}_0 - z_1) - F(z; z_0 - \bar{z}_1) + F(z; \bar{z}_0 - \bar{z}_1)] - \\ & - \alpha X(z) + 2 \cdot (z_1 - \bar{z}_1) \cdot (z_0 - \bar{z}_0) \cdot [\gamma \alpha H \cdot (z; z_0 - \bar{z}_1) - \delta \bar{\alpha} H \cdot (z; \bar{z}_0 - z_1)] - [(z_0 - \bar{z}_0) - (z_1 - \bar{z}_1)] \times \\ & \times [\gamma \bar{\alpha} \cdot [G \cdot (z; \bar{z}_0 - z_1) + G \cdot (z; \bar{z}_0 - \bar{z}_1)] + \delta \alpha \cdot [G \cdot (z; \bar{z}_0 - z_1) + G \cdot (z; z_0 - z_1)]] + (\gamma P + \delta \bar{P}) \times \\ & \times [F(z; x_0 - z_1) - F(z; x_0 - \bar{z}_1)] - (z_1 - \bar{z}_1) \cdot [\gamma \bar{P} G \cdot (z; x_0 - \bar{z}_1) + \delta P G \cdot (z; x_0 - z_1)] \end{aligned} \quad (15)$$

де 
$$F(z; \xi) = \frac{1}{2 \cdot (z - \xi)} \left[ 1 - \frac{X(z)}{X(\xi)} \right];$$

$$G(z; \xi) = \frac{1}{(z - \xi)} \left[ F(z; \xi) - \frac{X(z)X'(\xi)}{2X^2(\xi)} \right];$$

$$H(z; \xi) = \frac{1}{(z - \xi)} \left[ G(z; \xi) + \frac{X(z)X''(\xi)}{2X^2(\xi)} - \frac{X(z)X' \cdot 2(\xi)}{X^3(\xi)} \right]; \quad \delta = \frac{1 \pm i\eta}{2}; \quad \gamma = 1 - \delta.$$

Сполучення потенціалів  $\Phi_B$ ,  $\Phi_D$  та  $\Phi_F$  дає наближене рішення задачі для закритої тріщини поблизу вільної поверхні під впливом поверхневого зосередженого зусилля та наближеної дислокаційної особливості. Апроксимація забезпечується за рахунок потенціалу  $\Phi_B$ , який не задовольняє умову відсутності поверхневих сил тертя при  $y = 0$ .

Для моделювання розгалуження при вершині головної тріщини необхідно замінити дискретну дислокацію особливість на розподілення напружень вздовж гілки тріщини таким чином, щоб тут задовольнялись вимоги граничних умов.

Формули всіх потенціалів, включаючи параметр дислокації  $\alpha$ , вважаються функціями як  $z$ , так і  $z_0$ , і тому сам параметр  $\alpha$  стає функцією  $z_0$ . Таким чином, наближені вирази для розрахунку напружень можуть бути записані через інтеграли у формі:

$$\Phi(z) = \int \Phi[z; z_0; \alpha(z_0)] dz_0. \quad (16)$$

Уздовж лінії розгалуження тріщини вводять таке дислокаційне розподілення, щоб можна було параметризувати  $z_0$  у формі  $z_0 = (c - id) + \xi \cdot e^{i\theta}$  при  $|\xi| \leq l$ . Отже, наведений вище вираз можна переписати у вигляді

$$\Phi(z) = \int_0^l \Phi[z; \xi; \alpha(\xi)] d\xi. \quad (17)$$

Підставляючи ці узагальнені інтегральні члени в потенціали, які включають  $\alpha$ , отримаємо можливість виразити напруження у будь-якій точці тіла через ще не визначену функцію  $\alpha(\xi)$ . Вимагаючи, щоб поверхневі сили від суми потенціалів перетворювались на нуль уздовж розгалуження тріщини, отримуємо інтегральне рівняння, із якого можна визначити невідому функцію  $\alpha(\xi)$ . Важливе значення тут має та обставина, що як тільки отримане числове значення функції  $\alpha$ , коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершини розгалуження можна вирахувати безпосередньо, тобто, біля вершини розгалуження справедливим є відношення:

$$K_1 + iK_{11} = \sqrt{(2\pi^3 l)} \cdot \alpha^*(\xi), \quad (18)$$

де  $\alpha^*(\xi) = \alpha(\xi) \cdot \sqrt{\xi^2 - l^2}$ .

**Числові результати.** Виведені вище інтегральні рівняння були розв'язані числовим методом, а потім обчислені коефіцієнти інтенсивності напружень при вершині розгалуження тріщини для різних кутів розгалуження. На рис. 2 графічно показані типові залежності коефіцієнта інтенсивності напружень від місця прикладання навантаження для кількох кутів розгалуження. У загальному випадку існує обмежена область положення навантаження, в якій розгалуження тріщини сприймає навантаження додатного знаку (тип I). Для таких випадків було виявлено, що область положення навантаження, в якій розгалуження підлягає розтягу, частково перекривається з областю прикладання навантаження. Тоді залежність від послідовності подій достатньо не врахована, однак границя не проявляє суттєвого впливу на зону вершини розгалуження до тих пір, доки область зчіплювання не стане домінуючою в головній тріщині. Таким чином, результати є якісно вірними, а у більшості випадків, імовірно, і у кількісному відношенні. При спрощених допущеннях, прийнятих для даної моделі, у першому наближенні цей рівень точності є цілком достатнім для нашої мети.

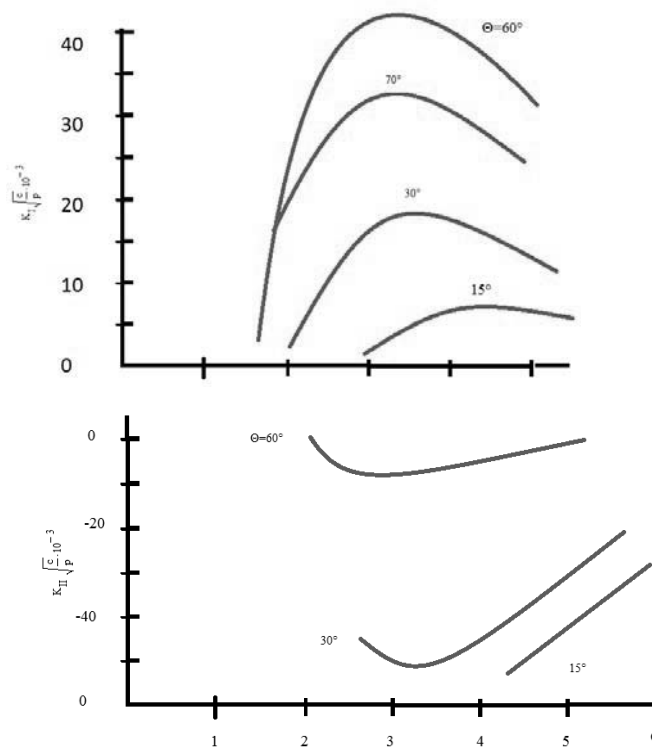


Рис. 2. Залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень при вершині розгалуження тріщини від місця прикладання навантаження для різних кутів розгалуження ( $d/c = 3,0$ ;  $l/c = 0,05$ ;  $\eta = 0,5$ )

**Висновок.** Наближена модель виявлення горизонтальних при поверхневих тріщин під впливом рухомого стискуючого навантаження на поверхню робочого органу показала, що найбільш ймовірним є ріст коротких тріщин і тріщин середньої довжини (відносної довжини  $c/d$ ) за типом II, хоча можливий і ріст по типу I із розгалуженням. Такий висновок ґрунтується на результатах розрахунку коефіцієнту інтенсивності напружень, а також критерію конкуруючих типів руйнування, в якому найважливішим параметром для визначення переважаючого типу росту тріщини є відношення  $\Delta K_{II} / \Delta K_{Imax}$ .

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Панасюк В.В., Сушинский А.И., Кацов К.Б. Разрушение элементов конструкций с несквозными трещинами. – К.: «Наукова думка», 1991. – 172 с.
2. Андрейкив А.Е. Разрушение квазихрупких тел с трещинами при сложном напряженном состоянии. – К.: «Наукова думка», 1979. – 127 с.
3. Вакулєнко І.О., Анофрієв В.Г., Грищенко М.А. Дефекти залізничних коліс. – Дніпропетровськ: Вид-во Маковецький Ю.В., 2009. – 112 с.
4. Серенсен С.В. Сопротивление материалов усталостному и хрупкому разрушению. – М.: Атомиздат, 1975. – 191 с.
5. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 412 с.