

УДК 539.374

*Наталія Белевцова*

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ В ДВУХ  
НАПРАВЛЕНИЯХ ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ  
НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ НАГРУЖЕНИЯ С УЧЕТОМ  
ИСТОРИИ ИХ ПРОТЕКАНИЯ**

*В статье исследуются траектории деформирования оболочки вращения переменной жесткости в двух направлениях при неосесимметричных неизотермических процессах нагружения с учетом истории их протекания.*

*В статті досліджено траєкторії деформування оболонок обертання жорсткості у двох напрямках при неосесиметричних неізотермічних процесах навантаження з урахуванням історії їх перебігу.*

*The paper investigated the trajectory of deformation of shells of rotation stiffness in two directions at neosesymetrychnyh non-isothermal processes of loading, taking into account the history of their course.*

**Ключевые слова:** оболочка вращения, неизотермические процессы, траектории деформирования.

Настоящая работа является продолжением работ [1-4]. В ней исследуются траектории деформирования оболочки вращения переменной жесткости в двух направлениях, которая находится под действием неосесимметричных поверхностных сил и неравномерного нагрева. Задача решается на основе основных зависимостей теории тонких оболочек Новожилова [5], гипотез Кирхгофа-Лява в квазистатической и геометрически-линейной постановке. Используется теория простых процессов нагружения [6] с учетом истории их протекания [7]. Физические соотношения линеаризируются методом последовательных приближений в форме переменных параметров упругости [7,8]. Механические характеристики материала считаем зависимыми от температуры, деформации ползучести не учитываем. Разрешаются системы управлений для такого класса задач, полученного в [1], и имеет такой вид:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial S} = \Phi \left( \bar{N}; \frac{\partial \bar{N}}{\partial \theta}; \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \theta^2}; \frac{\partial^3 \bar{N}}{\partial \theta^3}; \frac{\partial^4 \bar{N}}{\partial \theta^4} \right), \quad (1)$$

где  $\bar{N}$  – вектор разрешающих функций.

© Белевцова Н. Л., 2012

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

К решению (1) применяем метод интегральных соотношений. Численно задачу решаем методом Рунге-Кутты с дискретной ортогонализацией по С.К. Годунову [9].

Исследуем влияние истории нагружения на напряженное состояние оболочки вращения с переменной жесткостью в меридиональном и окружном направлениях. С этой целью рассмотрим термоупруго-пластическое напряженное состояние оболочки вращения со сложной формой меридиана переменной жесткости в двух направлениях. Геометрию оболочки приведем на рис. 1. Толщина оболочки изменяется вдоль окружной координаты по закону:

$$h = h_o (1 + 0,5 \cos \theta), \quad (2)$$

где  $h_o$  – значение толщины оболочки, определяющееся для бочкообразного звена зависимостью:

$$h_o = \frac{h_k - h_n}{t_n} t + h_n, \quad (3)$$

Здесь  $h_n, h_k$  – значение толщин оболочки в сечении  $\theta = \pi/2$  – в начале и конце бочкообразного звена соответственно;  $t$  – текущее значение угла  $t_n$ . Для цилиндрической части  $h_o = \text{const}$ .

Оболочка находится в условиях конвективного теплообмена. Температура среды, омывающей оболочку с наружной поверхности, изменяется по закону:

$$\theta_1 = (380 - 360 e^{-0,3t_c}) (1 + 0,25 \cos \theta) [1 - 0,002(S - S_o)] \text{ } ^\circ \text{C} \quad (4)$$

где  $t_c$  – время;  $S_o$  – начальное и текущее значения меридиональной координаты. Внутренняя поверхность оболочки, также как правый и левый торцы ее, теплоизолированы. Теплофизические характеристики материала оболочки в процессе нагревания следующие:

$$\lambda = 0,1163 \text{ Вм/см} \cdot \text{град} ; \alpha_1 = 0,1163 \text{ Вм/см}^2 \cdot \text{град} ; \quad (5)$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 ; \quad \alpha = 0,037 \text{ см}^2 / \text{с}.$$

Температурное поле оболочки получено путем решения задачи теплопроводности, по методике, предложенной в работе [7], при разбиении оболочки:  $K_s = 53, K_\theta = 19, (0 \leq \theta \leq \pi), K_z = 5$ .

По толщине оболочки температура аппроксимировалась полиномом пятой степени, и в решении удерживалось две гармоники по косинусам. Оболочка выполнена из стали ЭИ-435. Слева оболочка жестко закреплена, а справа шарнирно оперта. Граничные условия выражаются через основные разрешающиеся функции [1] и имеют вид: слева –  $U_r = U_z = v = v_s = 0$ , справа –  $M_s = N_z = U_r = v = 0$ .

Расчет оболочки проводился при следующем разбиении:  $K_s = 53, K_\theta = 19, (0 \leq \theta \leq \pi), K_z = 5$ . Искомые функции представлялись первыми двумя, четырьмя и пятью гармониками по косинусам.

Расчет показал, что результаты при представлении искомым функций двумя гармониками отличаются от результатов с четырьмя гармониками на 10–13 % по деформациям и на более 7 % по напряжениям. Учет же пятой гармоники уточняет результаты, полученные при представлении искомым функций четырьмя первыми гармониками, не более 0,9 %. Поэтому в расчете искомое решение представлялось четырьмя первыми гармониками по косинусам.

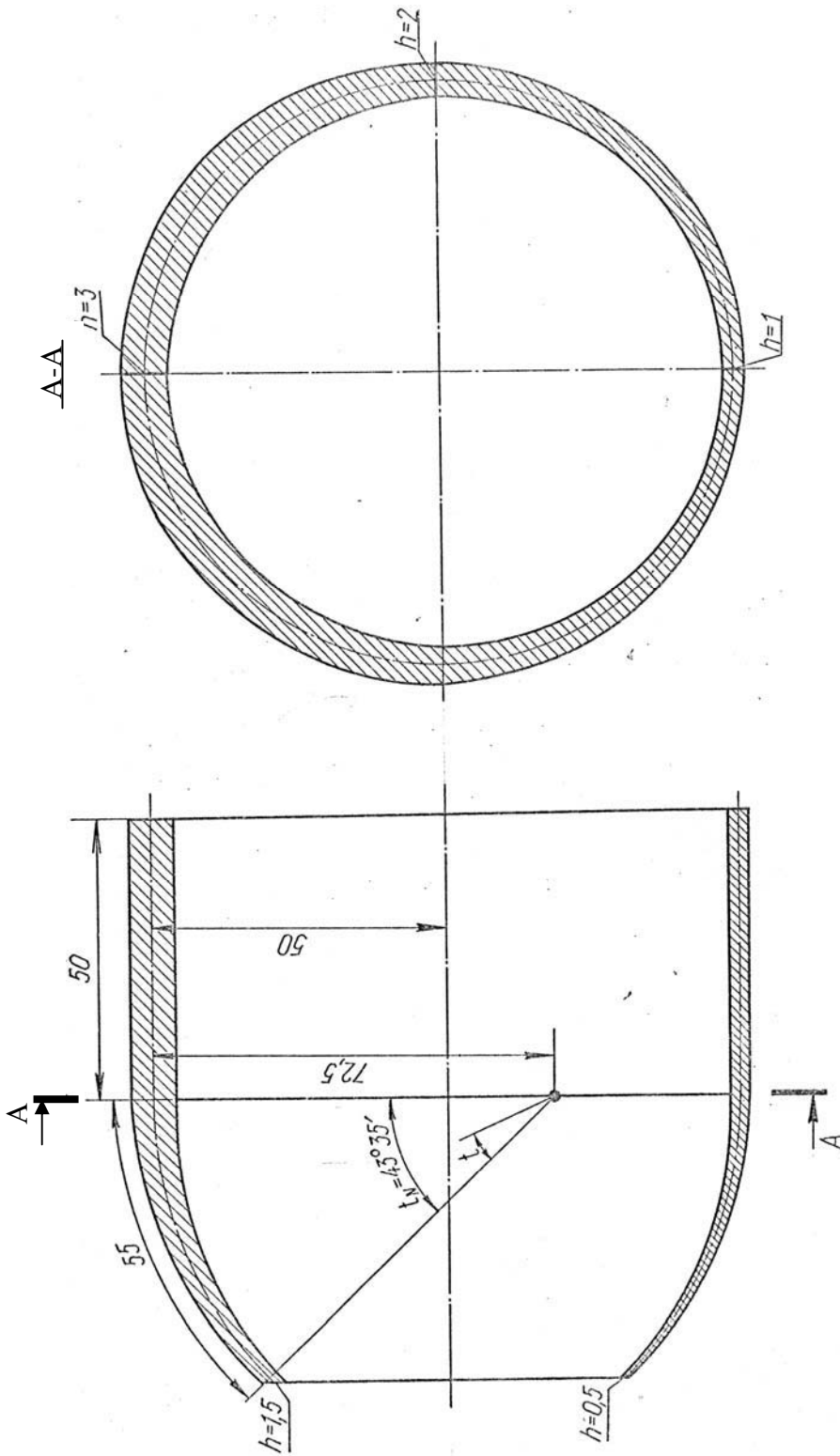


Рис. 1. Оболочка вращения со сложной формой меридиана

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

---

Для проверки достоверности полученных результатов задача просчитывалась и с другими вариантами разбиения:

$$1 - K_s = 106, K_\theta = 19, (0 \leq \theta \leq \pi), K_z = 5 ;$$

$$2 - K_s = 106, K_\theta = 19, (0 \leq \theta \leq \pi), K_z = 7 ;$$

$$3 - K_s = 106, K_\theta = 37, (0 \leq \theta \leq \pi), K_z = 5 .$$

Причем результаты, полученные по первому варианту разбиения и по принятому выше, отличаются не более чем на 1,2%, а по второму и третьему вариантам – не более чем на 2,5% при представлении искомым функций четырьмя первыми гармониками по косинусам.

Расчет проводился поэтапно: до 10 с. – с шагом 1,2 с. (1,2,3,5,7,9,10 с.) и с 10 с. до 30 с. – с шагом 4-8 с. (10, 14,22,30 с.), а также с большим количеством этапов: до 10 с. с шагом 1с. и с 10 до 30 с. с шагом 2 с., максимальное отличие, результатов при этом не превысило 2,6%.

Так как определение переменных параметров упругости [2, 3] и пластических составляющих компонент тензора деформаций в момент начала разгрузки зависят от направленности процесса нагружения, то необходимо ввести в рассмотрение критерий направленности процесса. В качестве этого критерия принимаем приращение интенсивности пластических деформаций сдвига  $\Delta\Gamma^P$ . Интенсивность пластических деформаций сдвига  $\Gamma^P$  определяется соотношением [7]:

$$\Gamma^P = (1 - 1/2G\psi)\Gamma \quad (6)$$

Тогда условие того, что процесс будет активным

$$\Delta\Gamma^P > 0, \quad (7)$$

при упругой разгрузке

$$\Delta\Gamma^P \leq 0.$$

Соотношения [2, 3] по форме записи совпадают с аналогичными соотношениями для ортотропных упругих оболочек [10], но в случае упругих оболочек жесткостные характеристики зависят только от механических свойств материала оболочки и ее температуры и не зависят от напряженно-деформированного состояния как в рассматриваемом случае.

При исследовании неизотермического процесса нагружения оболочки возникает вопрос о применимости соотношений теории простых процессов нагружения [1 – 4, 7] к описанию этого процесса. Экспериментальные исследования показали, что соотношения теории простых процессов нагружения хорошо описывают процессы деформирования элемента тела по прямолинейным траекториям или мало отклоняющихся от них. Поэтому при исследовании неизотермических процессов нагружения рекомендуется [7] строить траектории деформирования в пятимерном пространстве А. А. Ильюшина [6]. Координаты этого пространства применительно к рассматриваемым процессам деформирования оболочек определяются формулами [7]:

$$\Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\ell_s; \quad \Theta_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\ell_s + \ell_\theta\right); \quad (8)$$

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

---

$$\begin{aligned} \Theta_3 &= l_{s0} \sqrt{2}; \quad \Theta_4 = \Theta_5 = 0; \\ l_s &= \varepsilon_s^\xi - \varepsilon_o; \quad (S, \theta); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} l_{s0} &= \varepsilon_{s0}^\xi, \\ \varepsilon_o &= \frac{1}{3} (\varepsilon_s^\xi + \varepsilon_\theta^\xi + \varepsilon_\xi^\xi). \end{aligned} \quad (10)$$

По форме построенной траектории можно судить о применимости тех или других соотношений пластичности к исследуемым процессам нагружения. В тех случаях, когда траектории деформирования для всех элементов оболочки окажутся прямыми линиями или пологими кривыми, отклоняющимися от прямой, проведенной через начало координат и точку на траектории, соответствующую пределу текучести материала, на величину, не превышающую след запаздывания векторных свойств материала [7], применяемые здесь соотношения теории простых процессов нагружения хорошо согласуются с экспериментом. При этом наименьший радиус кривизны траектории должен быть больше следа запаздывания. След запаздывания векторных свойств материала определяет память материала и величина его находится из опытов по двухзвенным ломанным. Обычно след запаздывания для упрочняющихся материалов равен 5-10 пределов текучести по деформациям.

Траектории деформирования строим в координатах  $\Theta_1 - \Theta_2$ , поскольку составляющая  $\Theta_3$  мала по сравнению с первыми. Координаты  $\Theta_1 - \Theta_3$  определяем согласно зависимостей (8-10). На рис.2 – 4 построены траектории деформирования для значения меридиональной координаты  $S=20$  см при  $\theta=0$ ,  $\theta=\pi/2$ ,  $\theta=\pi$  для точек наружной поверхности и при  $\theta=\pi/2$  для внутренних точек оболочки. На рис.3 приведены траектории деформирования для точек с координатами:  $S=97$  см и  $\theta=0$ ,  $\theta=\pi/2$ ,  $\theta=\pi$ , лежащих на наружной поверхности оболочки. Из рисунков видно, что в оболочке процессы протекают по прямолинейным траекториям.

Построенные траектории дают основание утверждать, что процессы в исследуемой оболочке протекают по прямолинейным траекториям деформирования. Следовательно результаты получены в [2-4] на основании теории простых процессов нагружения с учетом истории их протекания достоверны.

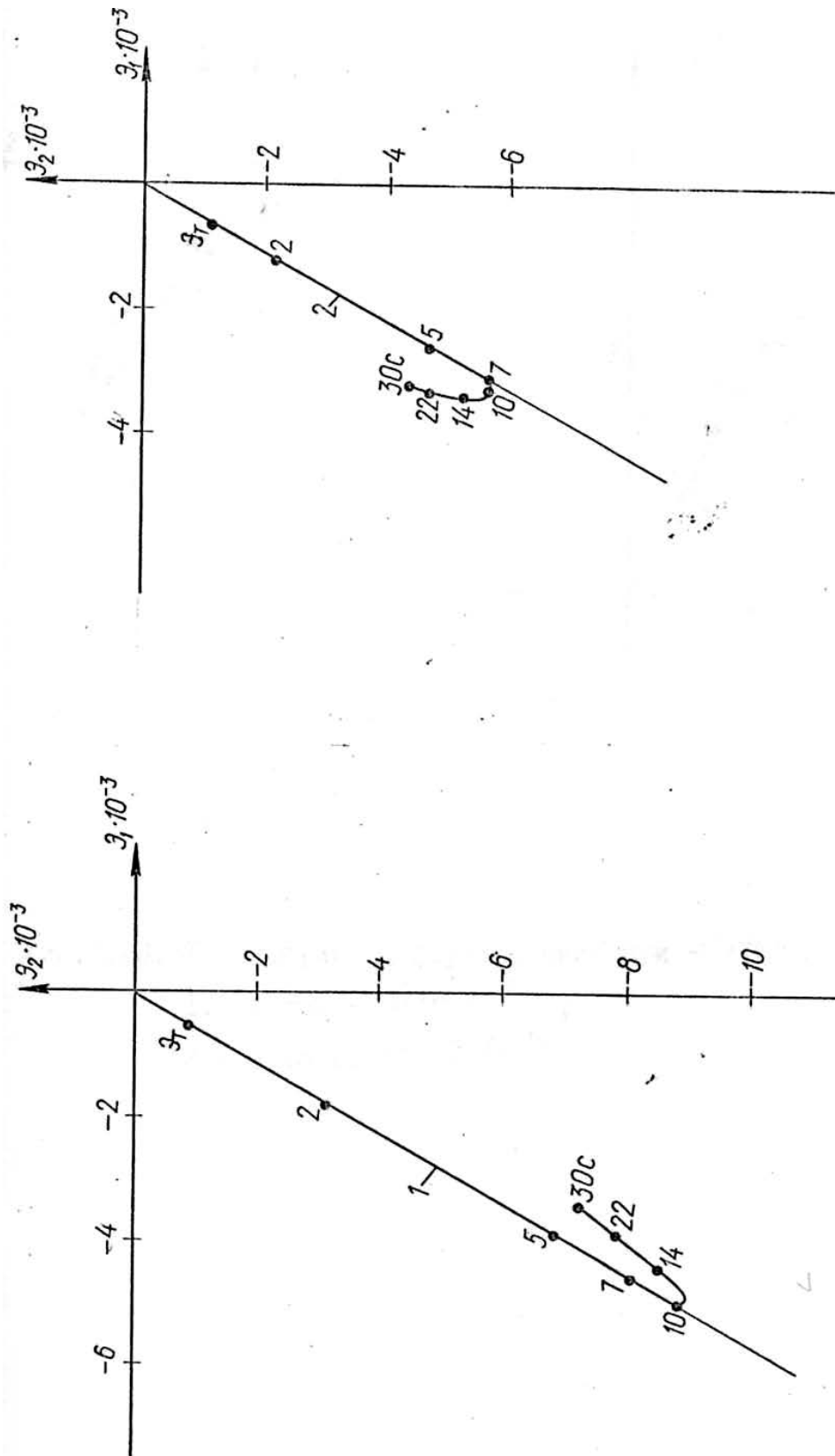


Рис. 2. Траєкторії деформування при  $S=20$  см: 1 – в точці  $\theta=0$ ,  $\xi=h/2$ ;  
2 – в точці  $\theta=\pi/2$ ,  $\xi=h/2$

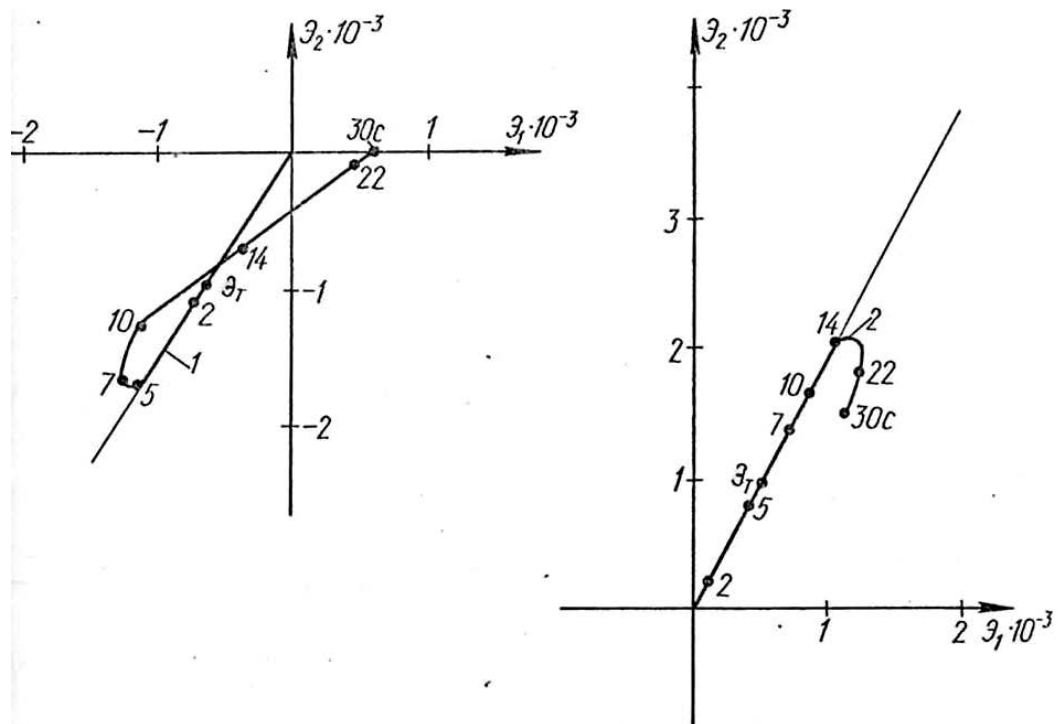


Рис. 3. Траектории деформирования при  $S=20$  см:  
1 – в точке  $\theta=0, \xi=h/2$ ;  
2 – в точке  $\theta=\pi/2, \xi=-h/2$

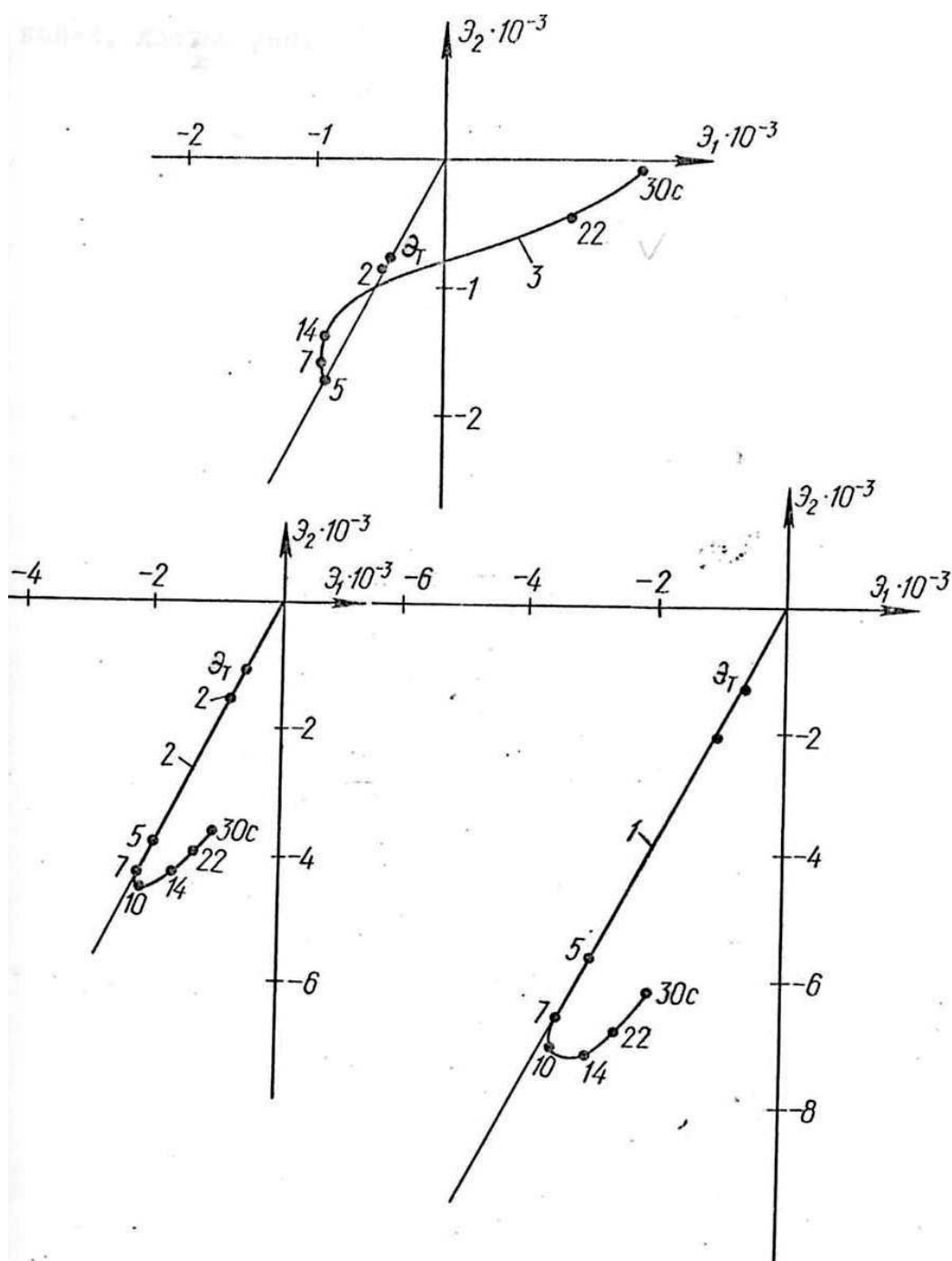


Рис. 4. Траектории деформирования при  $S=97$  см:

- 1 – в точке  $\theta=0, \xi=h/2$ ;
- 2 – в точке  $\theta=\pi/2, \xi=h/2$ ;
- 3 – в точке  $\theta=\pi, \xi=h/2$



# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

---

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Белевцова Н.Л.* Термоупруго-пластическое напряженное состояние оболочек вращения при неосесимметричной нагрузке с учетом истории нагружения // Прикл. механика. – 1982, – 18. – М7. – С. 117-120.
2. *Белевцова Н.Л.* Исследование влияния истории нагружения на напряженное состояние оболочек вращения переменной жесткости в двух направлениях // Прикл. механика. – 1986. – 22. – №4. – С.109-112.
3. *Белевцова Н.Л.* Термоупруго-пластическое напряженное состояние несимметричных оболочек вращения с учетом вторичных пластических деформаций // Збірник наукових праць. – КІЗТ, 1998. – том 1. – Вип.2. – С. 196-198.
4. *Белевцова Н.Л.* Термопружно-пластичний стан оболонки обертання із перемінною жорсткістю у коловому напрямку при простих процесах навантаження з урахуванням їх історії // Збірник наукових праць ДЕТУТ. Серія «Транспортні системи і технології», 2010. – Вип.17. – С. 142-147.
5. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
6. *Ильюшин А. А.* Пластичность. – М.: Гостехиздат. – 1948. – 376 с.
7. *Шевченко Ю.Н.* Прохоренко И.В. Теория упруго-пластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. – К.: Наук. думка, 1981. – 296 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; т.3).
8. *Биргер И.И.* Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // Прикл. математика и механика. – 1951. – 15. – № 6. – С.765-770.
9. *Годунов С.К.* О численном решении задач // Успехи мат. наук. 1961. –16. – №3. – С.171-174.
10. *Григорено Я. М.* Изотропные и анизотропные оболочки вращения с переменной жесткостью. – К.: Наук. думка, 1971. – 228 с.