

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

УДК 531.53:517.938

*Вікторія Ковальчук
Микола Сипливий*

ПРО КРИВІ СТАЦІОНАРНИХ СТАНІВ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

Показаний вплив параметрів перевернутого математичного маятника на конфігурацію кривих стаціонарних станів.

Показано влияние параметров перевернутого математического маятника на конфигурацию кривых стационарных состояний.

The overturned mathematical pendulum has been investigated. The influence of the pendulum's parameters of configuration of the curved of stationary states is shown.

Ключові слова: математичний маятник, стаціонарні стани, біфуркації.

Вступ. Перевернутий маятник є вдалою математичною моделлю стиснутого пружного стержня зі слідкуючою силою – одного з основних конструктивних елементів залізничних мостів і споруд. Диференціальні рівняння руху маятника в загальному випадку довільної кількості n ланок наведені в [1]. При $n = 3$ маємо можливість дослідити верхню ланку із пружно закріпленим кінцем і навантажену слідкуючою силою, а також нижню – базову ланку та середню ланку. Особливості динамічної поведінки такого маятника досліджені в [2]. Для визначення станів рівноваги потрійного маятника в силових полях різної структури в [3] подані математичні розрахунки щодо реалізації методу продовження за параметром. В [4] побудовані та проаналізовані фазові траєкторії при варіюванні параметрів маятника. У даній роботі автори, продовжуючи цикл указаних досліджень, побудували криві стаціонарних станів і показали, як впливають на конфігурацію цих кривих параметри маятника.

1. Постановка задачі. Перевернутий триланковий математичний маятник [1] має три пружні елементи, один із яких імітує пружне закріплення верхнього кінця маятника. Ланки маятника – невагомні абсолютно тверді стержні $OA_1 = l_1$, $A_1A_2 = l_2$ та $A_2A_3 = l_3$. Маси матеріальні точок A_1 , A_2 , A_3 , дорівнюють m_1 , m_2 і m_3 відповідно. На верхній кінець A_3 маятника діє слідкуюча сила \vec{P} .

Для дослідження плоскопаралельного руху визначаємо положення маятника за допомогою узагальнених координат φ_1 , φ_2 , φ_3 , фізичний зміст яких – кути відхилення ланок від вертикалі. Слідкуюча сила \vec{P} утворює з вертикаллю кут

© Ковальчук В.В., Сипливий М.В., 2012

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

$\alpha = \delta + k\varphi_3$, де коефіцієнт k – параметр орієнтації, а δ – кутовий ексцентриситет. Лінійний ексцентриситет ε [1–2] враховує неточність прикладання слідкуючої сили.

Диференціальні рівняння збуреного руху перевернутого математичного маятника зі слідкуючою силою можна скласти, застосовуючи рівняння Лагранжа II-го роду. При довільній кількості ланок нормальну форму Коші цих рівнянь можна записати у вигляді

$$x'_{2i-1} = x_{2i}, \quad (1)$$

$$x'_{2i} = F_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}), \quad \text{де } i = 1, \dots, n.$$

Тут n – кількість ланок, $x_{2i-1} = \varphi_i$ – змінні стану, φ_i – кут відхилення відповідної ланки маятника від вертикалі.

Для динамічної системи (1) стаціонарні стани задовольняють умові $x_i = \text{const}$, що рівносильно умовам $\varphi_i = \varphi_i^*$ та $\varphi'_i = 0$, тобто стаціонарними станами є положення рівноваги маятника. Величини φ_i^* є функціями параметрів маятника. Якщо слідкуюча сила симетрична, то один із станів рівноваги є очевидним: $\varphi_i^* = 0$, що відповідає вертикальному положенню ланок маятника.

Враховуючи, що для симетричної слідкуючої сили існує стійкий стаціонарний стан для певної сукупності значень параметрів маятника, можна методом продовження за параметром отримати неперервну залежність величин φ_i^* від параметрів слідкуючої сили [3]. Вважаючи всі параметри маятника фіксованими, за винятком «статичної» складової δ асиметричної слідкуючої сили \vec{P} , для визначення стаціонарних станів триланкового маятника маємо рівняння

$$f_i(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*, \delta) = 0,$$

де $i = 1, 2, 3$, а структура функцій f_i наведена в [3]. Покажемо у графічному вигляді неперервну залежність величин φ_i^* від δ для дискретного набору значень параметра k .

2. Криві стаціонарних станів. Відповідно до попередніх досліджень для параметрів маятника приймаємо такі значення:

$$\begin{aligned} m_1 &= 10 \text{ кг}, & l_1 &= 0,5 \text{ м}, & c_1 &= 400 \text{ Н}\cdot\text{м}, & \mu_1 &= 10 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}, \\ m_2 &= 5 \text{ кг}, & l_2 &= 0,5 \text{ м}, & c_2 &= 400 \text{ Н}\cdot\text{м}, & \mu_2 &= 10 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}, \\ m_3 &= 5 \text{ кг}, & l_3 &= 0,5 \text{ м}, & c_3 &= 400 \text{ Н}\cdot\text{м}, & \mu_3 &= 10 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}. \end{aligned}$$

Тут μ_i – коефіцієнти в'язкості в шарнірах маятника.

Множина четвірок чисел $(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*, \delta)$ у просторі змінних $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \delta$ утворюють криву лінію – многовид стаціонарних станів, які для маятника, що розглядається, є станами рівноваги. На рис. 1 показана проекція указанного многовиду на площину (φ_1, δ) для маятника із жорсткими характеристиками пружних елементів при $k = 0,95$ (асиметрична слідкуюча сила). Для побудови кривої був застосований пакет прикладних програм MatLab. Біфуркаційні точки, відмічені на кривій, відмежовують ділянки стійкості (на яких усі точки відповідають стійким особливим точкам системи диференціальних рівнянь (1) типу вузлових або фокусних) від ділянок нестійкості (на них усі точки є особливими точками типу сідловин). У точках A, B, C, D, L, M, N, Q крива стаціонарних станів

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

має вертикальні дотичні. До таких точок підходять дві гілки кривої. При наближенні вздовж кривої до біфуркаційних точок відбуваються катастрофи складки. При переході параметра δ через відповідне значення (δ_A , δ_B та ін.) відбуваються біфуркації народження або злиття стаціонарних станів. Характер стійкості неvertикальних положень рівноваги маятника, що відповідають різним гілкам кривої, протилежний: стійкість змінюється на нестійкість (або навпаки).

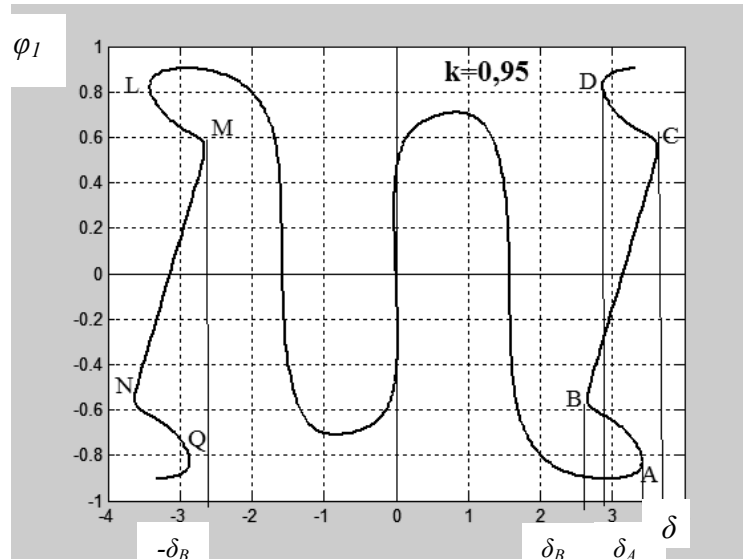


Рис. 1

Із фізичного змісту задачі зрозуміло, що функції $\varphi_i^*(\delta) \in 2\pi$ -періодичними для всіх значень параметра k . Тому вважаємо головними їхніми значеннями ті, що відповідають $\delta \in [-\pi, \pi]$.

Для маятника із симетричною слідкуючою силою ($k=1$) та з м'якими характеристиками пружних елементів головна гілка кривої стаціонарних станів зображена на рис. 2. Точки A , B , C , D , M , N є біфуркаційними. В залежності від напрямку зміни параметра δ у цих точках народжуються або зникають два стани рівноваги.

Конфігурація показаних кривих вказує на наявність також і катастроф зборки, які приводять до стрибкоподібної зміни кількості станів рівноваги маятника. При $|\delta| < \delta_B$ для маятника з жорсткими характеристиками пружних елементів маємо лише один стан рівноваги (рис. 1). При $\delta_B < |\delta| < \delta_D$ маятник має три неvertикальні ($\varphi_i \neq 0$) положення рівноваги. Якщо ж $\delta_D < |\delta| < \delta_A$, то як показує рисунок, існують п'ять станів рівноваги маятника. Ці висновки підтверджуються фазовими портретами, побудованими при $\delta = 3$ за допомогою безпосереднього інтегрування диференціальних рівнянь збуреного руху маятника аналогічно [4]. Хоча з практичної точки зору значення $\delta = 3$ є достатньо великим. Для більш реалізовних значень кутового ексцентриситета δ слідкуючої сили маємо у випадку маятника із жорсткими характеристиками лише одну гілку кривої стаціонарних

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

станів (рис. 1). Для маятника з лінійними або м'якими характеристиками пружних елементів навіть при невеликих значеннях δ на кривій стаціонарних станів маємо біфуркаційні точки.

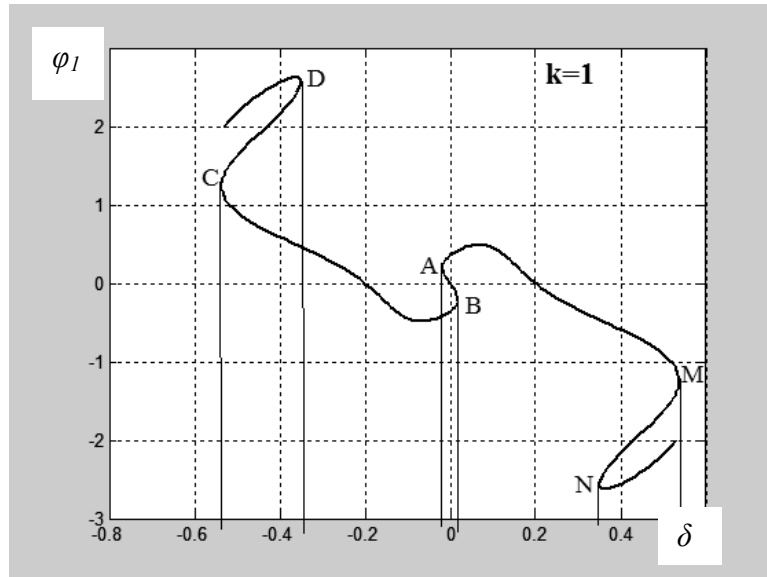


Рис. 2

Для того, щоб порівняння впливу типу характеристик пружних елементів маятника на стаціонарні стани, рис. 3 ілюструє, як змінюється конфігурація рівноважної кривої при фіксованому значенні параметра орієнтації слідкуючої сили. При цьому всі криві побудовані для маятника із симетричною слідкуючою силою ($k = 1$). Крива стаціонарних станів на рис. 3, а відповідає маятнику з лінійними характеристиками пружних елементів. Випадок м'яких характеристик показаний на рис. 3, б, а для маятника із жорсткими характеристиками рівноважна крива зображену на рис. 3, в.

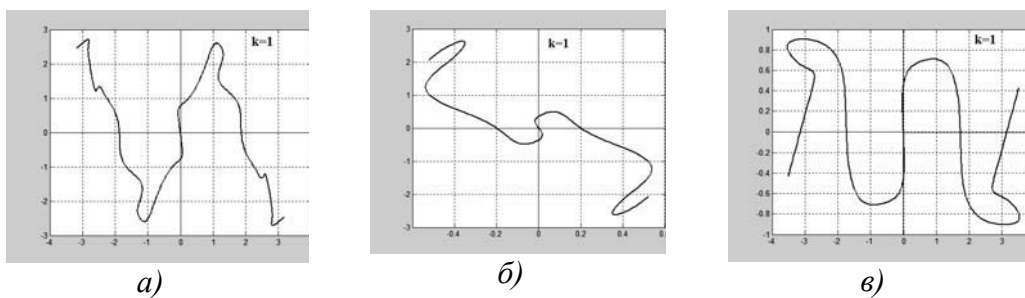


Рис. 3

Параметр орієнтації слідкуючої сили також впливає на кількість і характер стійкості стаціонарних станів маятника. Рівноважні криві, побудовані методом продовження за параметром для маятника із жорсткими характеристиками при різних значеннях k , показали, що при поступовому зменшенні параметра k крива звужується (біфуркаційні точки переміщуються в область із меншими значеннями

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

кутового ексцентриситета δ). Слід зазначити, що конфігурація кривої принципово не змінюється на ділянках, що відповідають значенням $1 \leq |\delta| \leq \pi$. Для малих же значень кутового ексцентриситета при $0,25 < k < 0,6$ крива стаціонарних станів має тим більше особливостей, чим менше значення k .

3. Висновки. При варіюванні параметрів триланкового маятника зі слідкуючою силою змінюється конфігурація кривої стаціонарних станів. Тип характеристик пружних елементів маятника, а також параметр орієнтації слідкуючої сили суттєво впливають як на кількість невертикальних положень рівноваги маятника, так і на характер їх стійкості. Отримані результати можна використовувати для оптимізації параметрів відповідних конструктивних елементів будівельних споруд для забезпечення їх міцності та стійкості.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лобас Л.Г. Об уравнениях опрокинутого маятника с произвольным числом звеньев под воздействием асимметричной следящей силы // Прикл. механика – 2007. – 43, № 5. – С. 106 – 114.
2. Ковальчук В.В. Особливості динамічної поведінки триланкового маятника зі слідкуючою силою // Зб. наук. праць Державного економіко-технологічного університету транспорту, Серія «Транспортні системи і технології», К., 2010. – Вип. 16. – С. 118 – 123.
3. Лобас Л. Г., Лобас Людм. Г., Сипливий М. В. Про стани рівноваги потрійного перевернутого маятника в силових полях різної структури // Зб. наук. праць Державного економіко-технологічного університету транспорту, Серія «Транспортні системи і технології», Київ. – 2010. – Вип. 16. – С. 150 – 156.
4. Ковальчук В.В., Гльницька А.В. Еволюція фазових траєкторій при варіюванні параметрів триланкового маятника // Зб. наук. праць Державного економіко-технологічного університету транспорту, Серія «Транспортні системи і технології», К., 2011. Вип. 18. – С. 132 – 138.