

УДК 532.528:519.6

*Владимир Семененко
Татьяна Семененко*

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Исследуется устойчивость стационарного состояния и развитие самовозбуждающихся колебаний в динамической системе с переменным запаздыванием, которая моделирует нестационарное поведение вентилируемой газонаполненной суперкаверны в жидкости. Показано, что после потери устойчивости в этой системе возможно установление как разрывных, так и неразрывных автоколебаний. Установлены границы параметрической области существования неразрывных решений.

Досліджується стійкість стаціонарного стану і розвиток коливань, що самозбуджуються, в динамічній системі зі змінним запізнюванням, яка моделює нестационарну поведінку вентильованої газонаповненої суперкаверни у рідині. Показано, що після втрати стійкості в цій системі можливе встановлення як розривних, так і нерозривних автоколивань. Визначені границі параметричної області існування нерозривних розв'язків.

Stability of stationary state and development of self-induced oscillation in the dynamic system with variable lagging, which models the unsteady behavior of a ventilated gas-filled supercavity in fluid, is investigated. It is shown that both the discontinuous and the continuous self-induced oscillations are possible in this system after the stability loss. The boundaries of a parametric domain of existence of discontinuous solution are determined.

Ключевые слова: динамическая система, устойчивость, автоколебания, вентилируемая суперкаверна.

Введение

При исследовании движения высокоскоростных подводных суперкавитирующих (СК) аппаратов возникают проблемы, связанные с возникновением колебательных и волновых процессов в жидкости. Одним из источников их возникновения является неустойчивость продольного движения СК-аппаратов (см. [1]). В этом случае причинами возникновения автоколебаний являются «игра» силы веса СК-аппарата и поддерживающей силы глиссирования аппарата в каверне, а также запаздывающая реакция каверны.

© Семененко В.Н., Семененко Т.Н., 2012

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Другим (независимым от первого) источником возникновения колебаний является неустойчивость вентилируемых каверн при избыточном поддуве газа в каверну (см. [2–4]). В этом случае причиной возникновения автоколебаний является упругость газа, заполняющего каверну, при этом роль постоянного источника энергии в динамической системе играет избыточный поддув газа в каверну, а роль регулятора – унос газа из каверны. С математической точки зрения в обоих случаях мы имеем дело с сугубо нелинейными динамическими системами с переменным запаздыванием. Ввиду сложности соответствующих задач для их исследования используется аппроксимационная математическая модель, основанная на принципе независимости расширения сечений тонкой нестационарной суперкаверны Г.В.Логвиновича [5]. В качестве основного метода исследования используется компьютерное моделирование течений.

Для качественного анализа нестационарного поведения вентилируемых каверн воспользуемся моделью «чистой» суперкаверны, в которой диаметр кавитатора считается пренебрежимо малым по сравнению с наибольшим диаметром каверны. При малых числах кавитации σ_0 для суперкаверны справедливы асимптотические формулы Гарабедяна [6]

$$D_c = D_n \sqrt{\frac{c_x}{\sigma_0}}, \quad L_c = D_n \frac{A \sqrt{c_x}}{\sigma_0}, \quad (1)$$

где D_c и L_c – наибольший диаметр и длина каверны; D_n и c_x – диаметр и коэффициент сопротивления кавитатора; $A = \sqrt{\ln(1/\sigma_0)}$. Модель «чистой» суперкаверны получаем, переходя к пределу $D_n/D_c \rightarrow 0$ и относя все переменные задачи к длине каверны L_c и скорости набегающего потока V_∞ . При этом стационарная суперкаверна имеет форму эллипсоида вращения единичной длины с образующей $R = D_c \sqrt{x(1-x)}$. В данной модельной постановке задача определяется двумя физическими параметрами:

$$\sigma_0 = \frac{2(p_\infty - p_c)}{\rho V_\infty^2}, \quad \beta = \frac{\sigma_v}{\sigma_0} > 1, \quad (2)$$

где σ_0 – число кавитации; p_∞ – давление в невозмущенной жидкости; p_c – давление в каверне; σ_v – паровое число кавитации при $p_c = p_v$.

1. Динамическая система. В нашей работе [7] получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающее поведение «чистой» нестационарной суперкаверны в предположении, что искомые функции $l(t)$, $\bar{\sigma}(t)$, $\bar{Q}_c(t)$ являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями времени:

$$\dot{\varphi} = \frac{2l(1-\varphi)^2 \dot{\bar{\sigma}}(t-l) + 2(1-\varphi^2) \bar{\sigma}(t-l) - 2\bar{\sigma}}{2l\bar{\sigma}(t-l) - 1}, \quad (3)$$

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

$$\dot{l} = \varphi, \quad (4)$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{(\beta - \bar{\sigma})\dot{\bar{Q}}_c - (\beta - 1)(\dot{q}_{in} - \dot{q}_{out})}{\bar{Q}_c - \bar{Q}_b}, \quad (5)$$

$$\dot{\bar{Q}}_c = l(2 - \varphi) - 2l^2(1 - \varphi)\bar{\sigma}(t - l). \quad (6)$$

Здесь $l(t)$ – длина каверны; $\bar{\sigma}(t) = \sigma(t)/\sigma_0$; $\bar{Q}_c(t) = \pi D_c^2 \bar{Q}_c$ – объем каверны; $\varphi(t)$ – вспомогательная функция; $\bar{Q}_b = \pi D_c^2 \bar{Q}_b$ – объем каверны, занятый корпусом аппарата. Поскольку в качестве масштаба длины нами выбрана длина каверны L_c , то коэффициенты расходов газа определяются в виде

$$\dot{q}_{in} = \frac{\dot{Q}_{in}}{V_\infty L_c^2}, \quad \dot{q}_{out} = \frac{\dot{Q}_{out}}{V_\infty L_c^2}, \quad (7)$$

где \dot{Q}_{in} , \dot{Q}_{out} – объемные расходы поддува газа в каверну и уноса из каверны при давлении в каверне p_c . Расход газа в каверну \dot{Q}_{in} является свободным задаваемым параметром. Для расхода газа из каверны \dot{Q}_{out} используем универсальную степенную зависимость, введенную нами в [7]:

$$\dot{Q}_{out} = V_\infty D_n^2 C \sigma^\eta(t), \quad \eta < 0, \quad (8)$$

где C – безразмерный эмпирический коэффициент, который может зависеть от Fr , σ_0 , β и других параметров. Таким образом, динамическая система (3)–(6) содержит четыре независимых неотрицательных параметра \bar{Q}_b , β , \dot{q}_{in} и C .

Как видно, в правые части уравнений (3), (6) входит неизвестная функция $\bar{\sigma}(t)$ и ее производная с переменным запаздыванием аргумента, которое в каждый момент времени равно значению другой неизвестной функции $l(t)$. Как известно, наличие запаздывающего аргумента равносильно увеличению размерности динамической системы, что усложняет ее динамическое поведение. Поэтому кроме практического значения, поведение решения системы (3)–(6) уравнений представляет интерес и с теоретической точки зрения как проявление нелинейных свойств сложной динамической системы нестандартного вида.

2. Линейный анализ. Динамическая система (3)–(6) имеет одну стационарную точку:

$$\varphi = 0, \quad \bar{\sigma} = 1, \quad l = 1, \quad \bar{Q}_c = \frac{1}{6}, \quad (9)$$

соответствующую стационарному решению задачи при равновесном поддуве каверны $\dot{q}_{in} = \dot{q}_{out}(0)$. Исследуем ее на устойчивость относительно малых возмущений, представляя решение в виде:

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

$$\varphi(t) = \varepsilon\varphi_1(t), \quad \bar{\sigma}(t) = 1 + \varepsilon\sigma_1(t), \quad l(t) = 1 + \varepsilon l_1(t), \quad \bar{Q}_c(t) = \frac{1}{6} + \varepsilon Q_1(t),$$

где $\varepsilon \sim \sigma(1)$ – малый параметр. Собирая члены порядка ε , исключая функции $\varphi_1(t)$, $l_1(t)$ и $Q_1(t)$ и представляя решение в виде $\sigma_1(t) = e^{\mu t}$, где $\mu = \lambda + jk$, получаем характеристическое уравнение:

$$\frac{a\mu^3}{\beta-1} + b\mu^2 + 2[\mu(e^{-\mu} + 1) + 2(e^{-\mu} - 1)] = 0, \quad \text{где} \quad a = \frac{1 - \bar{Q}_b}{6}; \quad b = -\frac{C\eta\sigma_0^{\eta+1}}{\pi c_x}. \quad (10)$$

Задача об устойчивости стационарного решения (9) состоит в исследовании комплексных корней уравнения (10) в зависимости от неотрицательных параметров a , b . Параметр b характеризует интенсивность уноса газа из вентилируемой каверны. Значение $b = 0$ соответствует теоретически допустимому случаю постоянства массы газа в каверне [2, 4]. При этом уравнение (10) имеет бесконечную серию чисто мнимых корней ($\lambda = 0$), т.е. частот нейтральных колебаний

$$k_n = 2\pi n \quad \text{при} \quad \beta_n = 1 + a(\pi n)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

При $b > 0$ корни уравнения (10) с заданной точностью определяются численно. Полагая в (10) $\lambda = 0$ и разделяя действительную и мнимую части, получаем два уравнения для определения параметров нейтральных колебаний k_n , β_n :

$$bk^2 - 2[k \sin k + 2(\cos k - 1)] = 0, \quad (12)$$

$$\beta = 1 + \frac{ak^3}{2[k(\cos k + 1) - 2 \sin k]}. \quad (13)$$

Анализ показал, что при $0 < b < 0,2036$ уравнение (12) имеет конечные серии корней, причем количество корней в серии уменьшается с ростом b . При $b > 0,2036$ уравнение (12) корней не имеет, при этом $\lambda < 0$, т.е. каверна асимптотически устойчива при любых значениях β (см. подробнее в [7]).

Основное практическое значение имеет наименьшее значение параметра $\beta_1 = \beta_{cr}$, поскольку при $\beta < \beta_1$ каверна асимптотически устойчива ($\lambda < 0$), а при $\beta > \beta_1$ – неустойчива ($\lambda > 0$). На рис. 1 показаны графики зависимости критического параметра β_{cr} и приведенной частоты нейтральных колебаний 1-й моды k_1 от параметра b , рассчитанные для ряда значений параметра \bar{Q}_b .

Представляет практический интерес характер влияния степени загромождения каверны корпусом СК-аппарата \bar{Q}_b на устойчивость вентилируемой каверны. Действительно, наличие твердого корпуса аппарата внутри каверны уменьшает ее «активный» объем, занятый сжимаемым газом, и тем самым изменяет динамические характеристики каверны. На рис. 2 приведены графики зависимости β_{cr} от \bar{Q}_b , рассчитанные для ряда значений параметра b . Как видно, значения

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

параметра β_{cr} лінійно зменшуються з ростом загромодження каверны. Это значит, что при прочих равных условиях загромождение каверны приводит к уменьшению порога ее неустойчивости.

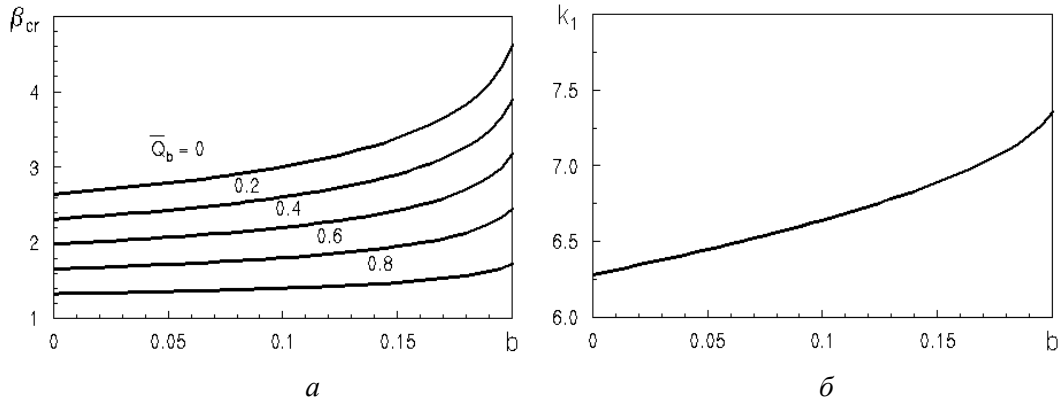


Рис.1. Влияние интенсивности уноса газа из каверны на параметр устойчивости β_{cr} (а) и приведенную частоту k_1 (б)

Как видно из уравнения (12), приведенные частоты нейтральных колебаний k_n не зависят от параметра a , т.е. от \bar{Q}_b . Легко видеть, однако, что размерная частота $f = k_1 V_\infty / (2\pi L_c)$ (в Гц) будет расти при увеличении \bar{Q}_b . Действительно, для СК-аппарата, движущегося на постоянной глубине при постоянном числе кавитации σ_0 , уменьшение параметра β_{cr} может достигаться только за счет уменьшения парового числа кавитации σ_v , т.е. за счет увеличения скорости аппарата V_∞ (см. 2). Поэтому уменьшение β_{cr} соответствует увеличению скорости V_∞ , и, следовательно, увеличению частоты f .

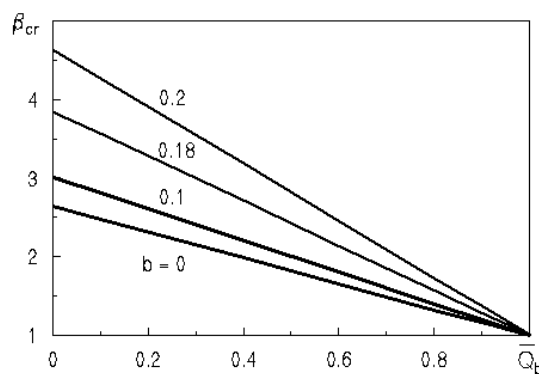


Рис.2. Влияние загромождения каверны корпусом аппарата

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

3. Расчет нелинейных автоколебаний. После потери устойчивости в динамической системе (3) – (6) развиваются нелинейные автоколебания, спектральный состав и амплитуда которых зависят от значений вышеперечисленных параметров. Вследствие колебаний давления в каверне граница каверны приобретает волнообразную форму, результатом чего может быть разрывной характер функций $l(t)$ и $\bar{Q}_c(t)$. Автоколебания вентилируемых каверн, развитие которых рассчитывается при избыточном поддуве газа $\dot{q}_{in} > \dot{q}_{out}(0)$ и без учета непрерывного уноса газа из каверны, обычно являются разрывными (см. [3, 4]). В нашей работе [4] разработан эффективный численный алгоритм расчета разрывных колебаний каверн.

Однако, при поддуве газа, близком к равновесному $\dot{q}_{in} = \dot{q}_{out}(0)$, и наличии непрерывного уноса газа после потери устойчивости могут устанавливаться и неразрывные автоколебания каверны. При этом все три искомые функции $l(t)$, $\bar{\sigma}(t)$ и $\bar{Q}_c(t)$ являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями времени, и для исследования поведения вентилируемой каверны удобно использовать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3)–(6). Она интегрировалась численно методом Рунге-Кутты при начальных условиях:

$$\varphi = 0, \quad l = 1, \quad \bar{\sigma} = 1, \quad \bar{Q}_c = \frac{1}{6} \quad \text{при} \quad t \leq 0.$$

Особенность расчетного алгоритма заключалась в необходимости сохранять массивы значений функции $\bar{\sigma}(t)$ и ее производной $\dot{\bar{\sigma}}(t)$, полученных на предыдущих шагах расчета, для вычисления функций запаздывающего аргумента $\sigma^{(n)}(t_n - l^{(n)})$ и $\dot{\sigma}^{(n)}(t_n - l^{(n)})$. Полученные временные ряды $l^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$, $Q^{(n)}$, $t_n = nh$, $n = 1, 2, \dots, N$ подвергались спектральному анализу и другим стандартным процедурам анализа нелинейных колебаний [8]. В результате получены подробные данные о зависимости решения $(l, \bar{\sigma}, \bar{Q}_c)$ от параметров и установлены границы области существования неразрывных решений системы (3)–(6).

4. Результаты расчетов. Ниже приводятся некоторые результаты расчетов неразрывных колебаний вентилируемых каверн при различных значениях параметров β и \bar{Q}_b . Как и следовало ожидать, автоколебания в системе возбуждаются при $\beta > \beta_{cr}$. Кроме основного параметра устойчивости β и степени загромождения каверны \bar{Q}_b , частота и амплитуда автоколебаний определяется величиной параметра $q_0 = \dot{q}_{in} - \dot{q}_{out}(0)$, т.е. величиной начального избыточного поддува газа в каверну. На рис. 3 показана форма трехмерных фазовых портретов установившихся неразрывных автоколебаний вентилируемой каверны (предельные циклы) для двух значений параметра \bar{Q}_b . Для наглядности вместо $\bar{\sigma}$ на графике нанесена величина безразмерного давления в каверне $p_c = \sigma_0(\beta - \bar{\sigma})$. Общие параметры расчета: $C = 0,0211$; $\eta = -1,5$; $\sigma_0 = 0,02$; $\beta = 3,2$; $q_0 = 0$. Отметим, что во втором случае амплитуда автоколебаний на порядок больше.

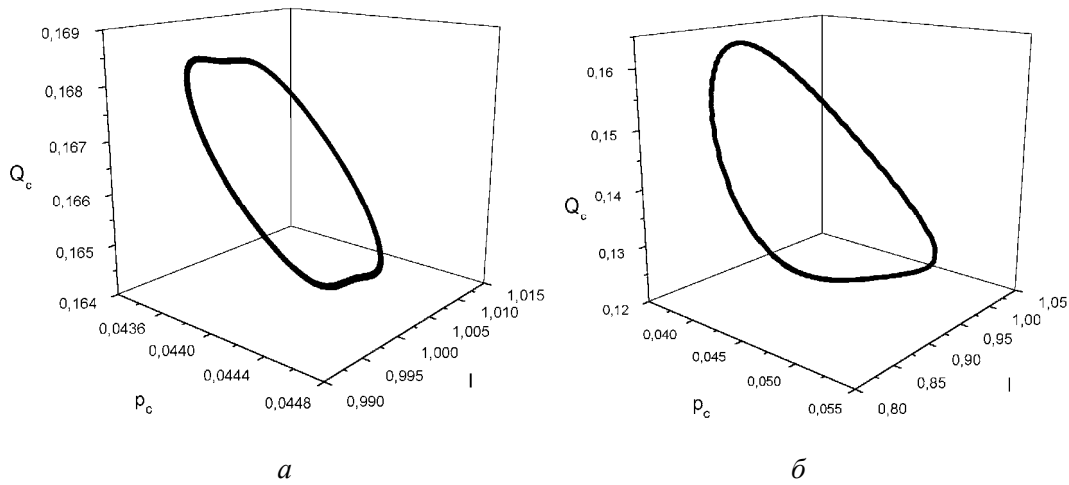


Рис.3. Предельные циклы в фазовом пространстве (l, p_c, Q_c)

$$1 - \bar{Q}_b = 0; \quad 2 - \bar{Q}_b = 0,2$$

На рис. 4 показана область существования неразрывных колебаний (заштрихована) на плоскости параметров (\bar{Q}_b, β) . Параметры расчета: $C = 0,0211$; $\eta = -1,5$; $\sigma_0 = 0,02$; $q_0 = 0$. Нижняя кривая рассчитана по уравнениям (12), (13) при $b = 0,0868$. Снизу от заштрихованной области автоколебания не возникают (каверна устойчива), а сверху становятся разрывными и уже не могут рассчитываться с помощью системы (3)–(6). Внутри заштрихованной области при фиксированном \bar{Q}_b приведенная частота и амплитуда колебаний возрастают с ростом β . При этом время выхода на установившийся режим автоколебаний уменьшается с ростом β .

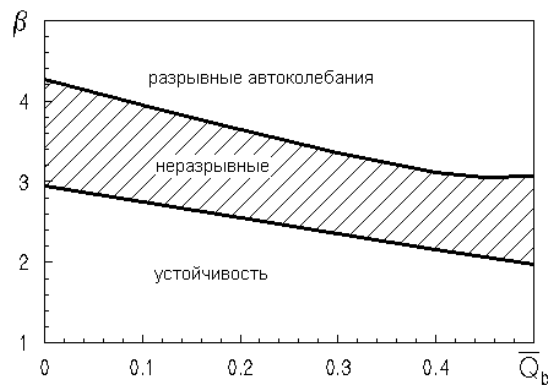


Рис.4. Область существования неразрывных автоколебаний

Графики на рис. 5 показывают, как изменяются приведенная частота k и размах установившихся колебаний длины каверны $\Delta l = l_{\max} - l_{\min}$ при возрастании степени

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

загромождження каверны телом \bar{Q}_b . Параметри расчета: $C = 0,0211$; $\eta = -1,5$; $\sigma_0 = 0,02$; $\beta = 3,0$; $q_0 = 0$.

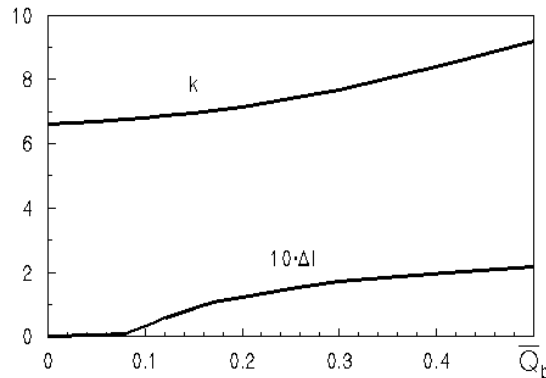


Рис.5. Зависимость частоты и размаха автоколебаний от \bar{Q}_b

Отметим, что в отличие от приведенной частоты k_1 нейтральных колебаний, которая не зависит от параметра \bar{Q}_b (см. (12)), приведенная частота нелинейных автоколебаний возрастает с ростом \bar{Q}_b .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована устойчивость стационарного решения и развитие неразрывных автоколебаний в динамической системе с переменным запаздыванием, моделирующей нестационарное поведение вентилируемой газонаполненной суперкаверны в жидкости. Расчеты показали, что система уравнений (3)–(6) имеет неразрывное решение при относительно небольших значениях $\beta > \beta_{cr}$ и при значениях коэффициента поддува газа \dot{q}_{in} , лишь ненамного превышающих свое равновесное значение $\dot{q}_{in} = \dot{q}_{out}(0)$. При увеличении каждого из параметров β , \dot{q}_{in} автоколебания каверны становятся разрывными. Установлены границы области существования неразрывных решений системы (3)–(6). Показано, что возрастание степени загромождения каверны корпусом аппарата \bar{Q}_b ведет к росту приведенной частоты автоколебаний и размаха колебаний длины каверны.

При движении реальных подводных СК-аппаратов с вентилируемыми кавернами возникновение автоколебаний (пульсаций) каверн является весьма нежелательным и опасным явлением. На практике его можно ожидать при сравнительно небольших скоростях движения и больших расходах газа на поддув каверны, что характерно, например, для участка разгона аппарата. Пользуясь результатами данной работы, можно в каждом конкретном случае указать, каким образом следует изменять параметры движения и поддува каверны, чтобы избежать развития автоколебаний или ослабить их амплитуду.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ЛИТЕРАТУРА

1. Семененко В.Н., Семененко Т.Н. Устойчивость и стабилизация продольного движения суперкавитирующих аппаратов // Збірник наукових праць Державного економіко-технологічного університету транспорту. Серія «Транспортні системи і технології», 2009, Вип. 15, С.134-143.
2. Парышев Э.В. Теоретическое исследование устойчивости и пульсаций осесимметричных каверн // Тр. ЦАГИ. – 1978 – Вып. 1907. – С. 17 – 40.
3. Парышев Э.В. Численное моделирование пульсаций вентилируемых каверн // Тр. ЦАГИ. – 1985. – Вып. 2272. – С. 19–28.
4. Семененко В.Н. Компьютерное моделирование пульсаций вентилируемых суперкаверн. Гидромеханика. – 1997. – Вып. 71. – С. 110–118.
5. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. – К: Наукова думка, 1969. – 208 с..
6. Semenenko V.N. Artificial cavitation. Physics and calculations. RTO-AVT/VKI Special Course on Supercavitating Flows. VKI, Brussels, Belgium. – 2001.
7. Семененко В.Н. Пульсации вентилируемых каверн при различных условиях замыкания – Прикладна гідромеханіка. – 2011. – Т. 13, № 4. – С. 62–67.
8. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику. – К: Наукова думка, 2005. – 263 с.