

*Іван Кульбовський  
Віктор Тютін  
Сергій Левківський  
Олена Незліна*

## ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ПЛАНЕТАРНОЇ ПЕРЕДАЧІ

*У статті розроблено динамічну модель планетарної передачі для розрахунку вимушених коливань, які викликані переміщенням у часі зазорами-натягами, що виникають у зубчастих зачепленнях. Пружні переміщення мас моделі дозволили теоретичним шляхом визначити нерівномірність розподілу навантаження між сателітами.*

*В статье разработана динамическая модель планетарной передачи для расчета вынужденных колебаний, которые были вызваны перемещением во времени зазорами-натягами, возникающими в зубчатых сцеплениях. Упругие перемещения масс модели позволили теоретическим путем определить неравномерность распределение нагрузки между сателлитами.*

*The article discloses a dynamic model that established on the planetary transmission. It assists in finding the forced vibrations which have been caused by movements in time at the distance of gaps that subsequently manifest alongside the notched concatenations. Theoretically, the springy motions of this model determine the unevenness in distributing the load in between the satellites.*

**Ключові слова:** динамічна модель, планетарна передача, зазор-натяг, алгорити, зачеплення.

**Постановка проблеми.** Розрахунки планетарних передач на міцність мають свої особливості в порівнянні з загальними методиками розрахунку рядових зубчастих передач. Головною їх відміною є необхідність урахування нерівномірності розподілу навантаження між сателітами при визначенні розрахункового моменту. В сучасних методиках розрахунку використовується коефіцієнт нерівномірності розподілу навантаження між сателітами, значення якого визначалися на підставі розрізаних досліджень, а силовий аналіз передач робився тільки у статиці. Слід зазначити, що переважна більшість планетарних передач у складі приводів різноманітних машин працює в умовах динаміки. Зважаючи на це, визначення сил в зачепленнях цих передач повинно здійснюватися в умовах динамічного або квазидинамічного навантаження. Теоретичне дослідження такого процесу можливе лише на підставі даних, отриманих в результаті рішення динамічної моделі.

**Аналіз публікацій.** Серед існуючих моделей для дослідження динаміки планетарних передач можна виділити три основні. Динамічна модель, яку запропонував доктор техн. наук, професор Санкт-Петербурзького інституту машинобудування (ВТУЗ – ЛМЗ) Вейц В.Л. [1], включає в себе масу центрального колеса з зовнішніми зубцями, одну приведену масу сателіта та безмасове водило.

© *Кульбовський І. І., Тютін В. М., Левківський С. А., Незліна О. А., 2012*

---

---

Вона призначена для розрахунку вільних коливань одноступінчастого редуктора. За допомогою моделі, яка була розроблена в Інституті машинознавства РАН ім. Благодирова А.А. під керівництвом доктора техн. наук Генкіна М.Д., також проводилися розрахунки власних частот тільки вже для двоступінчастого редуктора [2]. Особливістю цієї моделі є те, що сателіт представлений двома масами: моментом інерції в обертальному русі навколо власної осі та масою у поступальному русі разом з водилом. У кожному ступені маси трьох сателітів приведені до однієї відповідно для кожного виду руху. Ця динамічна модель описується системою одинадцяти лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку. В цьому ж науковому закладі під керівництвом доктора техн. наук Айрапетова Е.Л. була створена динамічна модель [3] для розрахунків з використанням методу динамічних піддатливостей. При цьому підході редуктор розподіляється на прості підсистеми, наприклад, центральне колесо з зовнішніми зубцями, водило, сателіт, центральне колесо з внутрішніми зубцями, які поєднані пружними зв'язками. Коливання кожної підсистеми описується невеликою кількістю рівнянь. Загальне рішення системи отримується за допомогою рівнянь спільних деформацій. До того ж, в цій моделі центральне колесо з внутрішніми зубцями представлено як елемент з розподіленою масою. Доцільність такого зображення епіциклу має сенс лише в окремих випадках, коли співвідношення товщини його ободу та радіусу знаходиться в межах  $\delta = 0,05R$ , а його з'єднання з корпусом здійснюється за допомогою пружних елементів. Тоді в тонкостінному кільці, яким по суті стає епіцикл, при роботі передачі можуть виникати специфічні форми коливань. Така модель була призначена для вивчення віброакустичних характеристик приводів.

На підставі зазначеного, можна зробити висновок, що всі розглянуті дослідження були спрямовані на аналіз вільних коливань. Це робилося з метою запобігання виникнення резонансу в нових конструкціях редукторів. Відсутність наукових праць спрямованих на визначення сил в зачепленнях планетарних передач в умовах динамічного або квазидинамічного навантаження пояснюється не тільки складнощами розробки багатосателітної динамічної моделі, але і необхідністю математичного описання випадкових зазорів, що виникають в зачепленнях.

**Метою** роботи є створення динамічної моделі планетарної передачі для розрахунку вимушених коливань, які викликані перемінними у часі зазорами – натягами, що виникають в зубчастих зачепленнях.

**Основна частина.** Оцінка рівня динамічної напруженості зачеплень зубчастих передач проводиться на підставі результатів динамічного розрахунку. Точність отриманих даних значною мірою залежить від правильного вибору динамічної моделі. Будь-яка модель – це спрощення процесу, що розглядається, і є заміною реального об'єкта його динамічною схематизацією. Вибір динамічної моделі не є однозначним і залежить від поставленої мети динамічного аналізу. Створення моделі також передбачає прийняття деяких припущень, які дозволяють спростити математичні викладки та при цьому не вносять значних похибок у кінцевий результат.

В даних передачах центральне колесо з внутрішніми зубцями «b» запресоване в корпус або жорстко приєднане до нього за допомогою болтового з'єднання. Така конструкція передачі дає підставу схематизувати всі маси як зосереджені.

Зміна жорсткості зачеплення через різну кількість зубців, що водночас знаходяться в контакті, може приводити до виникнення параметричного резонансу. При розробці нової передачі конструктори обов'язково проводять її перевірку на можливість прояви цього явища і у разі потреби здійснюють відстроювання конструкції зміною кінематичних параметрів. Це дозволяє не враховувати зміну жорсткостей і розглядати майбутню модель як систему з постійними параметрами.

Дисипативні властивості передачі суттєво впливають на динамічні характеристики лише в зоні резонансу. Вивчення резонансних явищ не є метою даної роботи. Тому динамічну систему даних планетарних передач будемо вважати за консервативну.

---

Головним завданням моделі, що розробляється є можливість отримувати амплітуди пружних коливань усіх мас редуктора, що спричинені внутрішніми збурюючими силами, які викликані проявою зазорів – натягів в зубчастих зачепленнях. Основними факторами, що ускладнюють створення такої моделі є багатопоточність редуктора, складний рух окремих його деталей, значна кількість мас. Результати проведених теоретичних досліджень вказують на необхідність обов’язкового виділення в моделі як окремих мас осей сателітів. Хоча такий крок не відповідає загальним рекомендаціям по розробці динамічних моделей через те, що вони мають дуже малі маси, він забезпечує відображення в моделі кінематичних зв’язків між деталями при складному русі. Всі інші рухомі деталі передачі також схематизовані окремими масами. Кожен сателіт представлений в моделі окремою масою, яка включає в себе його момент інерції в обертальному русі та приведену до неї масу в поступальному русі разом з водилом. Всі з’єднання між рухомими та нерухомими масами представлені в моделі в вигляді безмасових пружних елементів з відповідними значеннями жорсткостей. Таким чином, планетарна передача з’єднана на вході з масою, наприклад, двигуна, а на виході – з робочим органом машини, схематизується 10 – масовою динамічною моделлю.

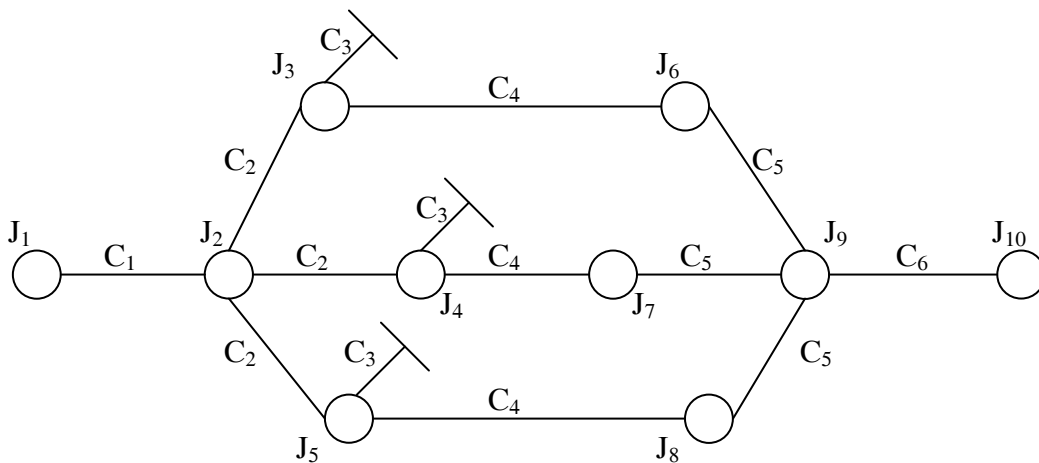


Рис. 1. Динамічна модель планетарної передачі

В моделі прийняті такі позначення мас та жорсткостей:

$J_1$  – момент інерції маси двигуна;

$J_2$  – момент інерції центрального колеса «а» із зовнішніми зубцями;

$J_3, J_4, J_5$  – моменти інерції сателітів «g» в обертальному русі та приведені до них маси у поступальному русі разом з водилом;

$J_6, J_7, J_8$  – моменти інерції мас осей сателітів;

$J_9$  – момент інерції водила «h»;

$J_{10}$  – момент інерції маси, приєднаної до вихідного вала передачі;

$C_1$  – жорсткість вхідного вала передачі;

$C_2$  – жорсткість зубчастого зачеплення «а – g»;

$C_3$  – жорсткість зубчастого зачеплення «g – b»;

$C_4$  – жорсткість встановлення сателіта у водилі;

$C_5$  – жорсткість водила «h»;

$C_6$  – жорсткість з’єднання передачі з робочим органом.

Математична модель, що аналітично зображує переміщення мас в запропонованій динамічній моделі, складається з десяти неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами.

$$\begin{aligned}
I_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= T_d \\
I_2 \ddot{\varphi}_2 - C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + C_2 (\varphi_2 - \varphi_3) + C_2 (\varphi_2 - \varphi_4) + C_2 (\varphi_2 - \varphi_5) &= -C_\varepsilon (\Delta\varphi_3 + \Delta\varphi_4 + \Delta\varphi_5) \\
I_3 \ddot{\varphi}_3 - C_2 (\varphi_2 - \varphi_3) - C_3 \varphi_3 + C_4 (\varphi_3 - \varphi_6) &= C_\varepsilon \Delta\varphi_3 \\
I_4 \ddot{\varphi}_4 - C_2 (\varphi_2 - \varphi_4) - C_3 \varphi_4 + C_4 (\varphi_4 - \varphi_7) &= C_\varepsilon \Delta\varphi_4 \\
I_5 \ddot{\varphi}_5 - C_2 (\varphi_2 - \varphi_5) - C_3 \varphi_5 + C_4 (\varphi_5 - \varphi_8) &= C_\varepsilon \Delta\varphi_5 \\
I_6 \ddot{\varphi}_6 - C_4 (\varphi_3 - \varphi_6) + C_5 (\varphi_6 - \varphi_9) &= 0 \\
I_7 \ddot{\varphi}_7 - C_4 (\varphi_4 - \varphi_7) + C_5 (\varphi_7 - \varphi_9) &= 0 \\
I_8 \ddot{\varphi}_8 - C_4 (\varphi_5 - \varphi_8) + C_5 (\varphi_8 - \varphi_9) &= 0 \\
I_9 \ddot{\varphi}_9 - C_5 (\varphi_6 - \varphi_9) - C_5 (\varphi_7 - \varphi_9) - C_5 (\varphi_8 - \varphi_9) + C_6 (\varphi_9 - \varphi_{10}) &= 0 \\
I_{10} \ddot{\varphi}_{10} - C_6 (\varphi_9 - \varphi_{10}) &= -T_0,
\end{aligned} \tag{1}$$

де  $\varphi_i$  – пружні обертальні деформації відповідних мас динамічної моделі;  
 $\Delta\varphi_3, \Delta\varphi_4, \Delta\varphi_5$  – додаткові переміщення мас сателітів, що викликані проявою зазорів – натягів в зубчастих зачепленнях «а – g»;  
 $T_d$  – обертальний момент двигуна;  
 $T_0$  – обертальний момент на робочому органі;  
 $C_\varepsilon$  – приведена жорсткість планетарної передачі.

Для перевірки працездатності моделі було отримано її рішення для параметрів, що наведені в табл. 1 та табл. 2.

При виконанні динамічного розрахунку як приклад були використані розміри деталей, кінематичні та силові характеристики передачі, яка до цього досліджувалася експериментально. Це дозволило порівняти рішення моделі з даними експеримента.

Таблиця 1. Жорсткісні параметри моделі

Назва жорсткості пружнього зв'язку	Позначення жорсткості в моделі	Числове значення жорсткості, $\frac{\text{Н} \cdot \text{мм}}{\text{рад}} \cdot 10^4$
Жорсткість вхідного вала	$C_1$	3,6
Жорсткість зачеплення «а – g»	$C_2$	3,02
Жорсткість зачеплення «g – b»	$C_3$	3,04
Жорсткість встановлення сателіта у водилі	$C_4$	0,4
Жорсткість водила «h»	$C_5$	2,5
Жорсткість вихідного вала	$C_6$	0,52

Таблиця 2. Інерційні параметри моделі

Назва інерційного параметра	Позначення маси в моделі	Числове значення моменту інерції, $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot 10^{-3}$
Момент інерції маси двигуна	$I_1$	3,83
Момент інерції центрального колеса «а»	$I_2$	0,79
Моменти інерції сателітів «g»	$I_3 = I_4 = I_5$	1,5
Моменти інерції мас вісей сателітів	$I_6 = I_7 = I_8$	0,11
Момент інерції водила	$I_9$	2,82
Момент інерції на вихідному валу	$I_{10}$	5,0

**Висновки.** Отримані результати підтвердили працездатність розробленої динамічної моделі. Пружні переміщення мас моделі дозволили теоретичним шляхом визначити нерівномірність розподілу навантаження між сателітами. Для порівняння теоретичних даних з експериментальними були використані значення коефіцієнта нерівномірності розподілу навантаження. В обох дослідженнях значення цих коефіцієнтів визначалися в 36 точках протягом кінематичного циклу, що для передачі, яка розглядається приблизно дорівнює шести обертам водила. Максимальне значення коефіцієнта нерівномірності за результатами експерименту становило  $\Omega = 1,48$ , а за даними моделі –  $\Omega = 1,57$ . Незначне перевищення теоретичної величини над дослідною, пояснюється тим, що алгоритм формування зазорів – натягів в зубчастих зачепленнях передбачає можливість виникнення найбільш несприятливого випадку, коли в певний момент часу співпадають за напрямком дії три вектори первинних помилок виготовлення та складання деталей планетарної передачі. З іншого боку, в конкретній передачі, яка досліджувалася експериментально, такий факт не спостерігався. Подальша робота буде присвячена вдосконаленню моделі з метою отримання можливості визначення нерівномірності по довжині контактних ліній.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Вейц В. Л. Динамика управляемых машинных агрегатов [Текст] / В. Л. Вейц, М. З. Коловский, А. Е. Кочура. – М. : Наука, 1984. – 351 с.
2. Динамические процессы в механизмах с зубчатыми передачами [Текст]: сборник статей / [под ред. М. Д. Генкина и Э. Л. Айрапетова]. – М. : Наука, 1976. – 155 с.
3. Айрапетов Э. Л. Динамика планетарных механизмов [Текст] / Э. Л. Айрапетов, М. Д. Генкин. – М. : Наука, 1980. – 256 с.
4. Павлице В.Т. Основи конструювання та розрахунку деталей машин: Підручник. – 2-ге вид. перероб.– Львів: Афіша, 2003. – 500 с.
5. Коновалюк Д.М., Ковальчук Р.М. Деталі машин : Підручник. – К. : Кондор, 2004.–584 с.