

**Леонід Лобас**

Людмила Лобас

Тетяна Лупіна

## ДО ПИТАННЯ ПРО РУХ ПЕРЕВЕРНУТОГО ДВОЛАНКОВОГО МАЯТНИКА

*Розглядається перевернутий дволанковий маятник з в'язко-пружними шарнірами, верхній кінець якого закріплено в'язко-пружно. Розглядаються рівняння збуреного руху маятника. Приведена оцінка впливу в'язкого тертя у верхньому закріпленні на область стійкості вертикального положення рівноваги маятника.*

*Рассматривается перевернутый двухзвенный маятник с вязко-упругими шарнирами, верхний конец которого закреплен вязко-упруго. Рассматриваются уравнения возмущенного движения маятника. Приведена оценка влияния вязкого трения в верхнем закреплении на область устойчивости вертикального положения равновесия маятника.*

*Considered a double inverted pendulum with viscous-elastic hinges. The upper end of pendulum is fixed visco-elastic. Considered the equations of perturbed motion of pendulum. The assessment of the effect of viscous friction of the upper of the vertical position on the region of stability.*

**Ключові слова:** маятник, стійкість, слідкуюча сила, в'язко-пружні в'язі, рівняння руху, збурений рух, власні значення матриці лінеаризації, характеристичне рівняння, область стійкості.

У роботі розглядається задача про рух перевернутого дволанкового маятника, що моделює стиснутий пружний стрижень під дією слідкуючої сили [1, 2].

Задача розв'язується у розширеній постановці, що враховує не тільки пружне закріплення верхньої ланки дволанкового маятника, але й лінійно-в'язкий опір (тертя).

Розрахункова схема маятника представлена на рис. 1. Довжини ланок  $l_1 = OA_1$ ,  $l_2 = A_1A_2$ , маси матеріальних точок  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2) - m_1, m_2$ . За узагальнені координати взято кути  $\varphi_1, \varphi_2$  відхилення ланок маятника від вертикалі. Зв'язок між декартовими та узагальненими координатами виражають формули (1):

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \cos \varphi_1, \quad y_1 = l_1 \sin \varphi_1, \\x_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2, \quad y_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2.\end{aligned}\tag{1}$$

© **Лобас Л. Г.**, Лобас Людм., Лупіна Т. О., 2012

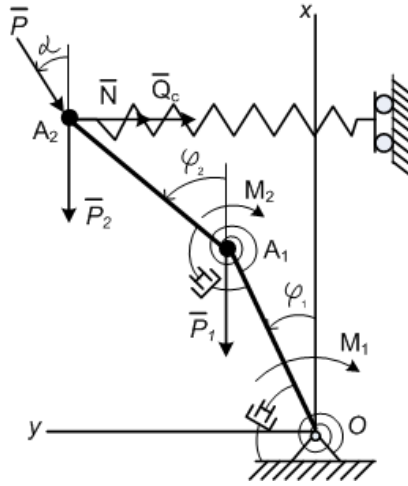


Рис. 1. Розрахункова схема маятника

Сили і моменти, показані на рис. 1, визначаються формулами (2):

$$\begin{aligned} \bar{N} &= -\bar{j}\dot{N}, \quad N = v\dot{y}_2, \quad [v] = \frac{H \cdot c}{m}, \quad N = v(l_1\dot{\varphi}_1 + l_2\dot{\varphi}_2), \\ \bar{M}_1 &= -\bar{k}M_1, \quad \bar{M}_2 = -\bar{k}M_2, \quad M_1 = M_1^f + M_1^e, \quad M_2 = M_2^f + M_2^e, \\ M_1^f &= \mu_1\dot{\varphi}_1, \quad [\mu_1] = H \cdot m \cdot c, \quad M_2^f = \mu_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1), \quad [\mu_2] = H \cdot m \cdot c. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут індексами «*f*» та «*e*» позначено фрикційні та еластичні складові.

На основі рівнянь Лагранжа другого роду, поклавши  $q_1 = \varphi_1$ ,  $q_2 = \varphi_2$  в роботі [3] отримано диференціальні рівняння плоскопаралельного руху досліджуваної моделі маятника.

В частинному випадку  $\delta = 0$  система диференціальних рівнянь руху дволанкового маятника має розв'язок:

$$\varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad (3)$$

який відповідає станові рівноваги (незбурений розв'язок). Для знаходження рівнянь збуреного руху маятника, що відбувається в малому околі незбуреного, диференціальні рівняння плоскопаралельного руху маятника лінеаризовано в околі розв'язку (3). Одержано такі більш загальні в порівнянні з відомими рівняння у варіаціях:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2 + (\mu_1 + \mu_2 + vl_1^2)\dot{\varphi}_1 - (\mu_2 - vl_1l_2)\dot{\varphi}_2 + \\ + [c_1 + c_2 + cl_1^2 - gl_1(m_1 + m_2) - l_1P]\varphi_1 + (cl_1l_2 - c_2 + kl_1P)\varphi_2 = 0, \\ m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 - (\mu_2 - vl_1l_2)\dot{\varphi}_1 + (\mu_2 + vl_2^2)\dot{\varphi}_2 + \\ + (cl_1l_2 - c_2)\varphi_1 + [c_2 + cl_2^2 - m_2gl_2 - l_2(1-k)P]\varphi_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

де  $\nu, \mu_1, \mu_2$  – коефіцієнти лінійно-в'язкого тертя, а  $c, c_1, c_2$  – коефіцієнти пружності у верхньому закріпленні та шарнірах  $O$  і  $A_1$ .

Для подальшого дослідження на основі рівнянь (4) шляхом введення фазових змінних  $x_1 = \varphi_1$ ,  $x_2 = \dot{\varphi}_1$ ,  $x_3 = \varphi_2$ ,  $x_4 = \dot{\varphi}_2$  отримані лінеаризовані рівняння збуреного руху маятника у формі Коші:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2; \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4; \\ x_3' &= x_4; \\ x_4' &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4. \end{aligned} \quad (5)$$

Матриця коефіцієнтів А системи рівнянь (5) (матриця лінеаризації) має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & I \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{-[(cl_1l_2 - c_2)l_1 + (c_1 + c_2 + cl_1^2 - gl_1(m_1 + m_2) - l_1P)l_2]}{m_1l_1^2l_2}; \\ a_{22} &= \frac{(\mu_2 - vl_1l_2)l_1 - (\mu_1 + \mu_2 + vl_1^2)l_2}{m_1l_1^2l_2}; \\ a_{23} &= \frac{-[(c_2 + cl_2^2 - m_2gl_2 - l_2(I - k)P)l_1 + (cl_1l_2 - c_2 + kl_1P)l_2]}{m_1l_1^2l_2}; \\ a_{24} &= \frac{-(\mu_2 + vl_2^2)l_1 + (\mu_2 - vl_1l_2)l_2}{m_1l_1^2l_2}; \\ a_{41} &= \frac{m_2l_2[c_1 + c_2 + cl_1^2 - gl_1(m_1 + m_2) - l_1P] - l_1(m_1 + m_2)(cl_1l_2 - c_2)}{m_1m_2l_1l_2^2}; \\ a_{42} &= \frac{l_1(m_1 + m_2)(\mu_2 - vl_1l_2) + m_2l_2(\mu_1 + \mu_2 + vl_1^2)}{m_1m_2l_1l_2^2}; \\ a_{43} &= \frac{m_2l_2(cl_1l_2 - c_2 + kl_1P) - l_1(m_1 + m_2)[c_2 + cl_2^2 - m_2gl_2 - l_2(I - k)P]}{m_1m_2l_1l_2^2}; \\ a_{44} &= \frac{-[l_1(m_1 + m_2)(\mu_2 + vl_2^2) + m_2l_2(\mu_2 - vl_1l_2)]}{m_1m_2l_1l_2^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Власні значення матриці А задовольняють рівняння  $|A - \lambda E| = 0$ , тобто є коренями характеристичного рівняння системи (4):

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)l_1\lambda^2 + (\mu_1 + \mu_2 + vl_1^2)\lambda + & m_2l_1l_2\lambda^2 - (\mu_2 - vl_1l_2)\lambda + cl_1l_2 - c_2 + kl_1P; \\ + c_1 + c_2 + cl_1^2 - gl_1(m_1 + m_2) - Pl_1; & \\ m_2l_1l_2\lambda^2 - (\mu_2 - vl_1l_2)\lambda + cl_1l_2 - c_2; & m_2l_2^2\lambda^2 + (\mu_2 + vl_2^2)\lambda + c_2 + cl_2^2 - m_2gl_2 - l_2(I - k)P \end{vmatrix} = 0$$

$$= A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0,$$

де

$$\begin{aligned} A_0 &= m_1m_2l_1^2l_2^2, \\ A_1 &= m_1l_1^2\mu_2 + m_2l_1^2\mu_2 + m_2l_2^2\mu_1 + m_2l_2^2\mu_2 + m_1l_1^2l_2^2\nu + 2m_2l_1l_2\mu_2 = \\ &= m_1l_1^2\mu_2 + m_2l_2^2\mu_1 + m_2\mu_2(l_1 + l_2)^2 + m_1l_1^2l_2^2\nu, \\ A_2 &= l_2^2\mu_1\nu + l_2^2\mu_2\nu + l_1^2\mu_2\nu + m_1l_1^2c_2 + m_2l_1^2c_2 + m_2l_2^2c_1 + m_2l_2^2c_2 + \mu_1\mu_2 + m_1l_1^2l_2^2c - \\ &- m_1m_2l_1^2l_2g - m_1l_1^2l_2P - m_2^2l_1^2l_2g - m_2l_1^2l_2P - m_1m_2l_1l_2^2g - m_2^2l_1l_2^2g - m_2l_1l_2^2P + 2l_1l_2\mu_2\nu + \\ &+ 2m_2l_1l_2c_2 + m_1l_1^2l_2Pk = \mu_1\mu_2 + m_1l_1^2l_2^2c + m_2l_2^2c_1 + [m_1l_1^2 + m_2(l_1 + l_2)^2]c_2 - \\ &- m_2l_1l_2g(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) - m_1l_1^2l_2P + m_1l_1^2l_2Pk - Pm_2l_1l_2(l_1 + l_2) - Pm_1l_1^2l_2(1 - k) + \\ &+ \mu_1\nu l_2^2 + \mu_2\nu(l_1 + l_2)^2, \end{aligned}$$

$$A_3 = l_2^2 \mu_1 c - l_2 \mu_1 P + l_2^2 \mu_2 c - l_2 \mu_2 P + l_1^2 \mu_2 c - l_1 \mu_2 P + l_1^2 c_2 v + l_2^2 c_1 v + l_2^2 c_2 v + \mu_1 c_2 - \\ - m_2 l_2 \mu_1 g - m_2 l_2 \mu_2 g - m_2 l_1^2 l_2 g v - l_1^2 l_2 v P - m_1 l_1 \mu_2 g - m_1 l_1 l_2^2 g v - m_2 l_1 \mu_2 g - m_2 l_1 l_2^2 g v - \\ - l_1 l_2^2 v P + \mu_2 c_1 + 2l_1 l_2 \mu_2 c + 2l_1 l_2 v c_2 + l_1 \mu_2 P k + l_2 \mu_2 P k + l_2 \mu_1 P k,$$

$$A_4 = m_2^2 l_1 l_2 g^2 - l_1^2 l_2 c P - l_1 l_2^2 c P - m_2 l_2 c_1 g - m_2 l_2 c_2 g - m_1 l_1 c_2 g - m_2 l_1 c_2 g + c_1 c_2 - m_2 l_1^2 l_2 c g - \\ - m_1 l_1 l_2^2 c g + m_1 m_2 l_1 l_2 g^2 + m_1 l_1 l_2 g P - m_2 l_1 l_2^2 c g + 2m_2 l_1 l_2 g P + l_1 l_2 P^2 + l_1^2 c c^2 + l_2^2 c c_1 - l_2 c_1 P + \\ + l_2^2 c c_2 - l_2 c_2 P - l_1 c_2 P + 2l_1 l_2 c c_2 + l_1 c_2 P k - l_1 l_2 P^2 k + l_2 c_1 P k + l_2 c_2 P k - m_1 l_1 l_2 g P k - m_2 l_1 l_2 g P k.$$

Необхідною і достатньою умовою того, що дійсні частини коренів характеристичного рівняння від'ємні (умова асимптотичної стійкості [4]) є:

$$A_4 > 0, \Delta_3 = A_1(A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_0 A_3^2 > 0 \quad (8)$$

Розв'язавши нерівності (8) відносно слідкуючої сили, одержимо:

$$P < P_1(c), \quad P < P_{кр}(c). \quad (9)$$

Таким чином, межі області стійкості на площині параметрів  $c$  і  $P$  складаються з ділянок двох кривих:

$$P = P_1(c), \quad P = P_{кр}(c). \quad (10)$$

Криві (10) розбивають площину істотних параметрів на області з різним характером власних значень матриці лінеаризації. Точки, що належать цим кривим, знаходили, змінюючи модуль слідкуючої сили  $P$  (при фіксованих інших параметрах маятника), як такі, в яких відповідні значення власних значень матриці лінеаризації (6) змінюють свій характер.

Межами області стійкості верхнього вертикального положення дволанкового маятника на площині параметрів  $c$  і  $P$  при  $m_1 = 10$  кг,  $m_2 = 5$  кг,  $l_1 = l_2 = 0,5$  м,  $c_1 = c_2 = 400$  Нм,  $\mu_1 = \mu_2 = 10$  Нмс,  $v = 0$  є дві гіперболи, зображені на рис. 2.

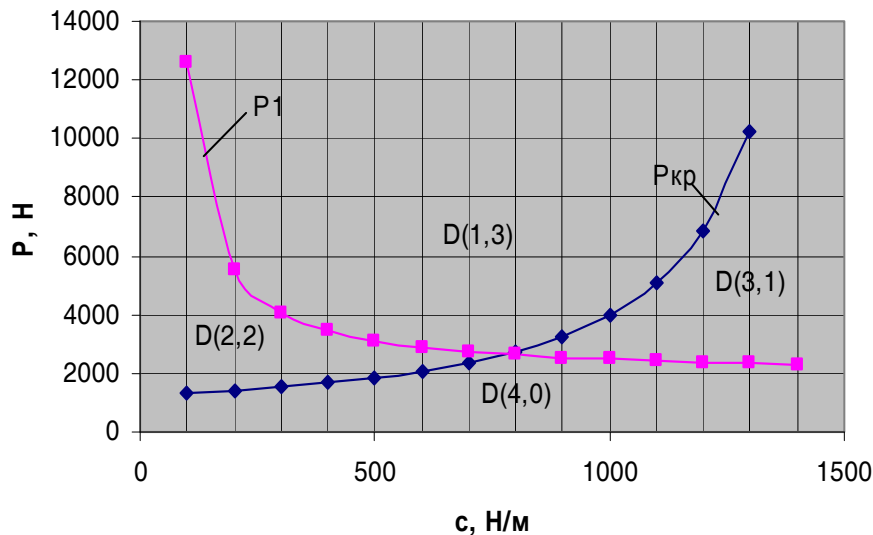


Рис.2. Розбиття площини істотних параметрів на області з різним характером власних значень матриці лінеаризації ( $v=0$ )

Позначимо через  $D(s, 4-s)$  область площини  $cP$ , в якій  $s$  коренів  $\lambda$  характеристичного рівняння системи (4) мають від'ємні дійсні частини, тобто область асимптотичної стійкості є  $D(4,0)$ . При переході кривих знизу вгору, тобто при збільшенні слідкуючої

сили  $P$  при  $c = const$ , зменшується кількість коренів  $\lambda_i$ , у яких дійсна частина від'ємна: на 1, якщо переходити криву  $P = P_l(c)$ , і на 2, якщо переходити криву  $P = P_{кр}(c)$ .

Таким чином, перехід кривих (10) у відповідному напрямку приводить до таких структурних змін у розбитті площини параметрів  $c$  і  $P$  на області з різною кількістю від'ємних дійсних частин коренів характеристичного рівняння системи (4):

$$D(4,0) \rightarrow D(2,2) \rightarrow D(1,3) \rightarrow D(3,1)$$

Подальшим завданням було дослідження еволюції області стійкості при  $\nu \neq 0$ .

Були проведені розрахунки для визначення розбиття площини  $cP$  досліджуваного дволанкового маятника при  $\nu = 1 \frac{H \cdot c}{m}$ ,  $\nu = 2 \frac{H \cdot c}{m}$  та  $\nu = 5 \frac{H \cdot c}{m}$  на області з різним характером власних значень матриці лінеаризації. Результати, отримані при  $\nu = 1 \frac{H \cdot c}{m}$ , показані на рис. 3.

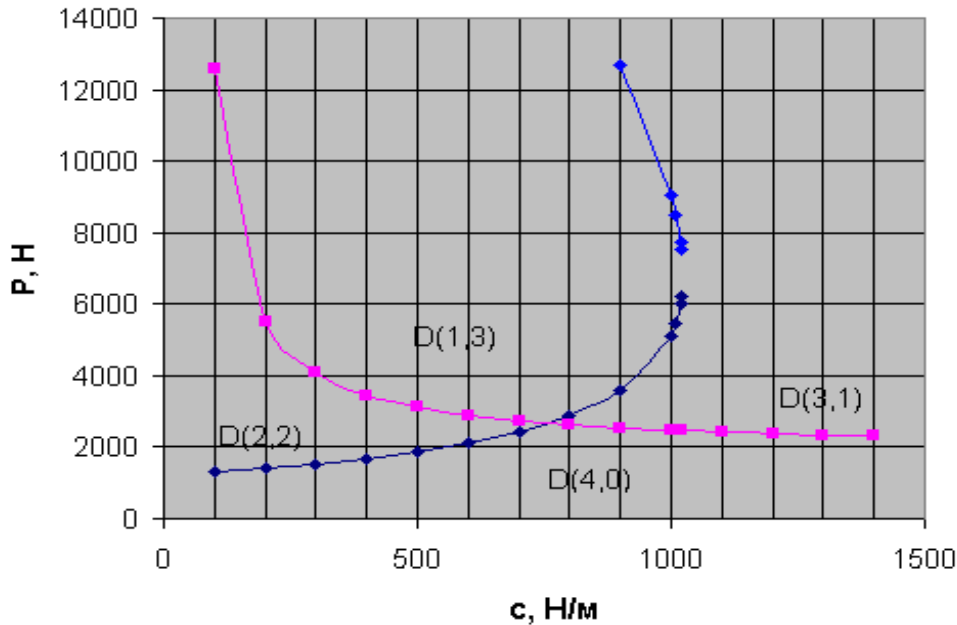
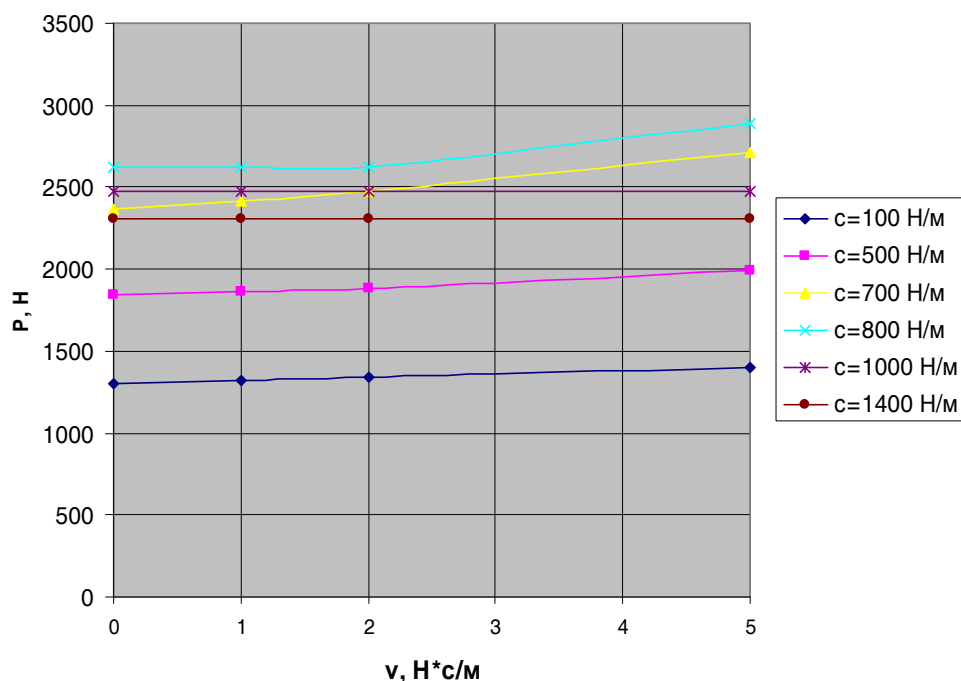


Рис.3. Розбиття площини істотних параметрів на області з різним характером власних значень матриці лінеаризації ( $\nu = 1 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ )

Аналіз результатів проведених розрахунків свідчить, що при заданих параметрах маятника в'язке тертя не впливає на положення кривої  $P_l$ , але суттєво змінює розташування та форму кривої  $P_{кр}$ : зі зростанням значення коефіцієнта в'язкого тертя  $\nu$  крива  $P_{кр}$  дещо зміщується вгору і після перетину з кривою  $P_l$  її верхня частина нахиляється вліво в напрямі осі  $P$ . Це призводить по мірі зростання значень  $\nu$  до розширення області асимптотичної стійкості  $D(4,0)$  і області  $D(3,1)$  та звуження областей  $D(2,2)$  і  $D(1,3)$ .

При значеннях  $c$  більших, ніж значення, при якому криві  $P_l$  і  $P_{кр}$  перетинаються, в'язке тертя у верхньому закріпленні маятника на межу області асимптотичної стійкості  $D(4,0)$  не впливає.

Залежність межі області асимптотичної стійкості  $D(4,0)$  від коефіцієнта в'язкого тертя  $\nu$  при різних значеннях жорсткості  $c$  пружного закріплення верхнього кінця маятника показана на рис. 4.



**Рис. 4. Залежність межі асимптотичної стійкості від коефіцієнта в'язкого тертя  $\nu$**

З приведених на рис. 4 даних видно, що при значеннях  $c \leq 800$  Н/м збільшення коефіцієнта в'язкого тертя  $\nu$  призводить до розширення області асимптотичної стійкості  $D(4,0)$ . Разом з тим, при великих значеннях коефіцієнта  $c$  ( $c=1000$ ,  $c=1400$  Н/м) в'язке тертя у верхньому закріпленні маятника не впливає на межу області асимптотичної стійкості, що визначається кривою  $P_1$ .

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ingenieur – Archiv. – 1952. – Bd.20, H.1. – S.49-56.
2. Elishakoff I. Controversy Associated With the So-Called “Follower Forces”: Critical Overview // Transaction of the ASME. Ser.: Applied Mechanics Reviews. – 2005. – Vol. 58, № 3. – P. 117–141.
3. [Лобас Л. Г.], Лобас Людм. Г., Луїна Т.О. Класифікація сил за їх математичною структурою в узагальненій задачі про рух перевернутого дволанкового маятника // Збірник наукових праць ДЕТУТ. – 2010. – Вип. 16. – С. 142–149.
4. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1971. – 312 с.