

*Вікторія Ковальчук*

## БІФУРКАЦІЇ ТА СТІЙКІСТЬ МАЯТНИКОВИХ СИСТЕМ ЗІ СЛІДКУЮЧИМИ СИЛАМИ

*Досліджені біфуркації у фазових просторах перевернутого математичного маятника зі слідкуючою силою. Проаналізовані якісні зміни у многовиді станів рівноваги маятника при зміні суттєвих параметрів системи.*

*Исследованы бифуркации в фазовых пространствах перевернутого маятника со следящей силой. Проанализованы качественные изменения в многообразии состояний равновесия маятника при изменении существенных параметров системы.*

*The bifurcations in the phase space of the overturned mathematical pendulum with the follower force's have been investigated. The qualitative changes in the manifold of the equilibrium states have been analysed.*

**Ключові слова:** математичний маятник, стаціонарні стани, біфуркації.

**Вступ.** Актуальність дослідження динамічної поведінки маятникових систем зі слідкуючими силами зумовлена збільшенням висоти будівельних споруд та об'єктів баштового типу. При певних збуреннях порушуються умови нормального функціонування елементів указаних конструкцій як механічних систем і створюється загроза їх міцності та стійкості.

Для одного з конструктивних елементів залізничних споруд (а саме – стиснутого пружного стержня, навантаженого на верхньому кінці слідкуючою силою) ефективною математичною моделлю є перевернутий математичний маятник із пружнозакріпленим верхнім кінцем [1]. При дослідженні особливостей динамічної поведінки одно-, дво- і триланкових систем була встановлена можливість декомпозиції рівнянь збуреного руху маятника [2]. З практичної точки зору важливим результатом є визначення біфуркаційних значень суттєвих параметрів досліджуваної механічної системи [3], оскільки при переході через ці значення відбуваються якісні зміни у многовиді станів рівноваги маятника. Для випадку триланкового маятника в [4] побудовані криві стаціонарних станів і проаналізовано, як змінюється конфігурація цих кривих залежно від параметрів системи. Метою наведених нижче досліджень є аналіз дивергентних і флаттерних біфуркацій у фазових просторах маятника.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо механічну систему, що складається з трьох матеріальних точок, з'єднаних між собою невагомими абсолютно твердими стержнями. Розрахункова схема досліджуваної моделі наведена в [1].

Диференціальні рівняння збуреного руху маятника складаємо за допомогою диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду:

© *Ковальчук В. В., 2013*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q(t, q, \dot{q}). \quad (1)$$

Правою частиною цих рівнянь є матриця-стовпчик  $Q(t, q, \dot{q})$  узагальнених сил, що діють на систему. Розмірність цієї матриці дорівнює  $n \times 1$ . Для одно-, дво- і триланкового маятників відповідно маємо:

$$Q(t, q, \dot{q}) = Q_1(t, q, \dot{q}), \quad Q(t, q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad Q(t, q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки положення досліджуваної механічної системи визначають кути  $\varphi_1, \varphi_2$  і  $\varphi_3$  відхилення ланок від вертикалі, то узагальненими координатами вважаємо  $q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2, q_3 = \varphi_3$ .

Кут, який сліdkуюча сила  $\bar{P}$  утворює з вертикаллю, дорівнює  $\alpha = \delta + k\varphi_3$ , де  $k$  – параметр орієнтації, а  $\delta$  – кутовий ексцентриситет. Неточність прикладання цієї сили, викликану як передбачуваними, так і випадковими зовнішніми чинниками, враховує лінійний ексцентриситет  $\varepsilon$  [1, 4]. В частинному випадку  $\alpha = \varphi_3$  сліdkуюча сила є симетричною і діє вздовж осі верхньої ланки маятника. В загальному випадку лінія дії сили утворює з верхнім стержнем кут, який має «статичну» ( $\delta$ ) і «динамічну» ( $k\varphi_3$ ) складові. Зауважимо, що внаслідок комутативності поворотів визначати напрямок дії сили  $\bar{P}$  можна двома способами: спочатку повернути від осі верхньої ланки маятника на кут  $\delta$ , а потім – на кут  $k\varphi_3$  або ж навпаки.

Система диференціальних рівнянь (1) допускає стан рівноваги  $q = \dot{q} = 0$ , що відповідає вертикальному положенню ланок маятника. Для збуреного руху диференціальні рівняння можна записати у нормальній формі Коші:

$$x'_{2i-1} = x_{2i}, \quad (2)$$

$$x'_{2i} = F_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}),$$

$$(i = 1, \dots, n).$$

Тут функції  $F_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$  є нелінійними відносно змінних стану

$$x_1 = \varphi_1, x_2 = \dot{\varphi}_1, x_3 = \varphi_2, x_4 = \dot{\varphi}_2, x_5 = \varphi_3, x_6 = \dot{\varphi}_3.$$

Дослідимо, як кількісні зміни параметрів маятника впливають на якісні зміни у фазовому просторі динамічної системи (2).

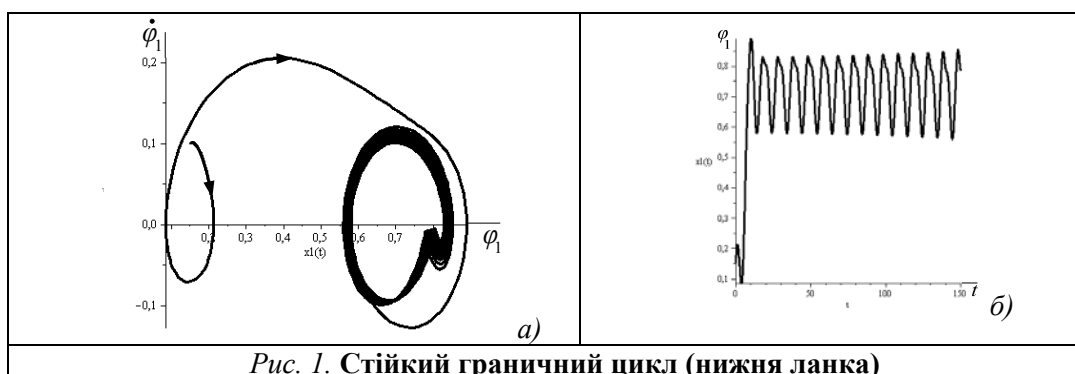
**2. Біфуркації стаціонарних станів маятника.** Суттєвими параметрами досліджуваної маятничкової системи вважаємо [1] модуль  $P$  сліdkуючої сили та коефіцієнт жорсткості  $c$  пружного закріплення верхнього кінця маятника. При розрахунках використовуємо формули переходу до безрозмірних величин:

$$\bar{P} = \frac{Pl_1}{c_1}, \quad \bar{c} = \frac{cl_1^2}{c_1},$$

де  $l_1$  і  $c_1$  – параметри нижньої ланки маятника, які приймаємо за базисні.

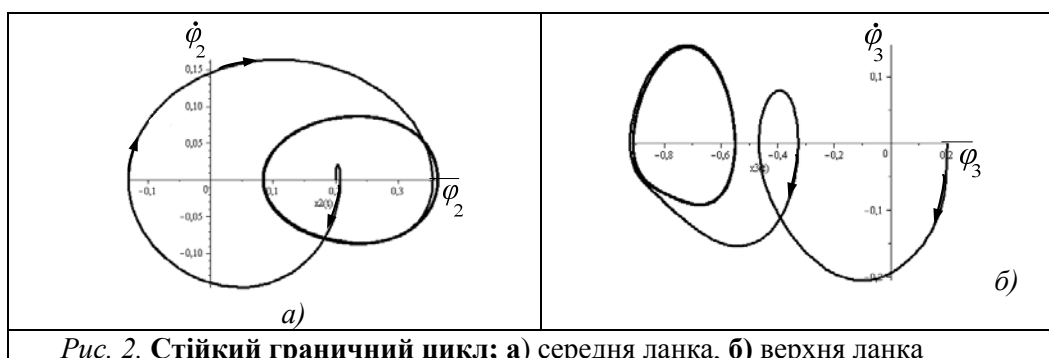
При кількісній зміні одного із суттєвих параметрів і фіксованому значенні іншого параметра у фазовому просторі відбуваються якісні зміни у багатовиді станів рівноваги маятника. При малих значеннях  $\bar{P}$  і  $\bar{c}$  верхнє вертикальне положення є асим-

птотично стійким. При поступовому збільшенні значення  $\bar{P}$  цей стан рівноваги втрачає свою стійкість внаслідок біфуркацій або катастроф. При проходженні через біфуркаційне значення  $\bar{P}_{кр}$ , що відповідає одному нульовому кореню характеристичного рівняння лінійного наближення системи (2), відбуваються дивергентні біфуркації. У фазовому просторі маятника народжуються дві особливі точки, що відповідають неvertикальним станам рівноваги. Якщо величина  $\bar{P}$  проходить через межу області стійкості, що відповідає парі суто уявних коренів характеристичного рівняння, то відбувається народження граничного циклу. На рис. 1, а показаний граничний цикл, побудований на фазовій площині  $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$  при таких значеннях параметрів:  $k = 0,25$  (параметр орієнтації слідкуючої сил),  $\bar{P} = 1,5$ ,  $\bar{c} = 0,8$ . Інші значення параметрів такі самі, що й у попередніх дослідженнях даного циклу [2, 4].



Фазова траєкторія ілюструє, що для заданої маятникової системи зображуюча точка, яка мала початкове збурення  $\varphi_1 = 0,15$ ,  $\dot{\varphi}_1 = 0,1$ , після певного переходного процесу потрапляє на граничний цикл. Залежність зміни кута  $\varphi_1$  від часу  $t$  показана на рис. 1, б. Як бачимо, з плином часу встановлюється періодичний закон зміни кута.

Фазові портрети на площинах  $(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)$  і  $(\varphi_3, \dot{\varphi}_3)$ , які відповідають середній та верхній ланкам маятника, наведені на рис. 2. Траєкторії побудовані за допомогою інтегрування задачі Коші в середовищі MAPLE (застосований оператор *DEplot*) при початкових збуреннях  $\varphi_2 = 0,2$ ,  $\dot{\varphi}_2 = 0$  та  $\varphi_3 = 0,2$ ,  $\dot{\varphi}_3 = 0,3$ .



---

На площині суттєвих параметрів  $(\bar{c}, \bar{P})$  відповідна точка  $(\bar{c} = 0,8; \bar{P} = 1,5)$  розташована в області  $D(4, 2)$ , в якій чотири корені характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини, а два корені мають додатні дійсні частини. Отже, верхній вертикальний стан рівноваги є нестійким. Таким чином результати комп'ютерного моделювання узгоджуються з теорією стійкості О. М. Ляпунова.

Для випадку, коли відповідна точка площини суттєвих параметрів маятника розташована в області  $D(5, 1)$  дивергентної нестійкості, також були побудовані фазові портрети. Аналіз отриманих графіків дає можливість простежити механізм втрати стійкості вертикального положення рівноваги маятника та дослідити перебудову якісної картини руху при зміні суттєвих параметрів системи.

**3. Висновки.** Проаналізовані два якісно різні типи втрати стійкості верхнього вертикального положення рівноваги: динамічна (типу флаттер) і «квазістатична» (дивергентного типу). Прикладним аспектом наведених досліджень є можливість використання отриманих результатів для удосконалення вихідних характеристик відповідних механічних систем. Крім того, наведена методика дослідження біфуркацій у фазових просторах може бути застосована для вивчення загальних закономірностей у поведінці інших нелінійних систем зі слідкуючими силами, а також при визначенні умов, за яких положення рівноваги системи втрачає стійкість і виникають граничні цикли.

Порівнюючи графіки на рис. 1 і 2, бачимо, що для верхньої ланки граничний цикл формується в області  $\varphi_3 < 0$  (рис. 2, б), а для нижньої та середньої ланок – в областях  $\varphi_1 > 0$  та  $\varphi_2 > 0$ . Це означає, що верхня ланка маятника відхиляється від вертикалі у протилежний по відношенню до двох інших ланок бік. Тому доцільно у подальших дослідженнях унаочнити результати за допомогою розробки анімаційної моделі засобами пакета прикладних програм у середовищі MAPLE.

## ЛІТЕРАТУРА

7. *Lobas L.G.* Dynamic Behavior of Multilink Pendulums under Follower Forces // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 6. – P. 587 – 613.
8. *Ковальчук В. В.* Маятникові системи: декомпозиція диференціальних рівнянь руху // Зб. наук. праць Державного економіко-технологічного університету транспорту, Серія «Транспортні системи і технології». – 2010. – Вип.17.– С. 155 – 158.
9. *Jin J.-D. Matsuzaki Y.* Bifurcations in a two-degree-of-freedom elastic system with follower forces // *J. Sound and Vibr.* – 1988. – 126, № 2. – P. 265-277.
10. *Ковальчук В. В., Сипливий М. В.* Про криві стаціонарних станів перевернутого маятника // Зб. наук. праць Державного економіко-технологічного університету транспорту, Серія «Транспортні системи і технології». – 2012. – Вип. 20. – С. 162 – 166.