УДК 929:51(091)

М. М. Крюков
Т. С. Клецька

ДО ІСТОРІЇ РОЗВИТКУ І СТАНОВЛЕННЯ ТЕОРІЇ НЕСКІНЧЕННИХ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Розглядаються деякі історичні аспекти формування теорії нескінченних числових рядів.

Рассматриваются некоторые исторические аспекты становления теории бесконечных числовых рядов.

We consider some historical aspects of the theory of infinite numerical series.

Ключові слова: числові ряди, збіжність, ознаки збіжності.

Історія математики завжди цікавила дослідників. Існує велика кількість робіт, які розглядають її в цілому з точки зору наукознавства, але чимало праць присвячено і окремим її розділам. В першу чергу серед них треба відзначити декілька фундаментальних робіт [1 – 3, 5 – 8, 10, 12, 13]. Незважаючи на довгу і плідну історію досліджень, іноді буває дуже важко відокремити певні питання для отримання більш докладної та цілісної картини. Теорія нескінчених числових рядів є дуже цікавим розділом математики, який має численні практичні застосування.

В цій роботі зроблена спроба розглянути один з аспектів історії розвитку теорії збіжності нескінченних додатних числових рядів.

Будь яку границю послідовності $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ можна представити у вигляді нескінченного ряду. Для цього достатньо покласти $s_n = s_{n-1} + a_n$ при $n > 1$ і $s_1 = a_1$. Тоді $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, а значення S є границею послідовності частинних сум s_n, що складається з n доданків. Цей факт виражається наступними словами: S є «*сумою нескінченного ряду*» $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$.

Таким чином, нескінченний ряд є своєрідний спосіб вивчення границі, для якої кожне наступне наближення значення отримується з попереднього шляхом додавання ще одного члена. Наприклад, принцип зображення числа у вигляді десяткового дробу є не що інше як зображення числа a у вигляді нескінченного ряду [9]:

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + ... ,$$

при цьому, якщо $0 \le a \le 1$, то $a_n = \alpha_n \cdot 10^{-n}$, а α_n означає одне з цілих чисел від 0 до 9. Оскільки кожну границю можна представити у вигляді нескінченного ряду, то, на перший погляд, можливо немає потреби у особливому вивченні рядів. Але в багатьох випадках границі виникають у вигляді нескінченних рядів і при цьому отримуються дуже прості закономірності. Зрозуміло, що не кожне розкладання в ряд виявляє прості закономірності. Наприклад, число π можна представити у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу, і ми не можемо вказати довільну цифру цього розкладання. Але якщо відмовитись від представлення π у вигляді десяткового дробу і використати для цього, наприклад, ряд Лейбніца, то отримаємо вираз з надзвичайно простим загальним способом утворення.

Як бачимо, тут ми маємо справу з математичною нескінченністю. Математична нескінченність, як стверджують дослідники історії розвитку математики, з'явилася в давньогрецькій або елінській культурі в VIII – VI ст. до н.е. як принципово новий елемент мислення. Нескінченні ряди використовували в грецькій математиці, хоча вони намагалися представляти їх, як скінченні суми $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, замість $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

Відповісти на питання, коли вперше з'явилися ряди в математиці неможливо. Вже вавилонські математики вміли сумувати арифметичну і геометричну прогресії.

Італійський математик П'єтро Менголі (Pietro Mengoli (1625 – 1668)) наглядно продемонстрував геометрично, що ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=1$ [1]. Квадрат зі стороною 1 має площу 1. Він поділив площу навпіл, потім одну з половин знову ділить навпіл і т.д., і отримує нескінченну кількість прямокутників з площами, які утворюють геометричну прогресію.

Довгий час питання збіжності числових рядів не розглядалося глибоко. Тому ще у 1754 р. з виразу для суми нескінченної геометричної прогресії $a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1-q}$ Ейлер «виводив», що $1-1+1-1+\ldots = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$, при цьому, навіть Фур'є спочатку приймав цей результат.

Поняття збіжності числових рядів, мабуть, вперше зявилось у листі Й. Бернуллі до Лейбніца від 7 квітня 1713 р., де він використав вираз «розбіжний ряд» (series divergens). У відповідь у листі від 28 червня Лейбніц використав вираз «збіжний ряд» (series advergens) майже у сучасному сенсі.

У подальшому в обіг увійшов термін convergens (в тому ж сенсі, що і advergens), який у 1677р. застосував для послідовностей Дж. Грегорі, а потім Ньютон [3]. Таким чином, вже Лейбніц явно сформулював означення збіжного ряду і його суми, яке в термінах теорії границь сформулював у 1821 р. Коші.

Треба відзначити, що П'єтро Менголі отримав важливі результати в області дослідження рядів, зокрема, довів розбіжність гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ в 50-х роках XVII ст. Термін «гармонічний ряд» запропонував у 1668 р. математик Броункер. Свою назву гармонічний ряд отримав з того факту, що кожний його член, починаючи з другого, є середнім гармонічним суміжних членів. Нагадамо, що число c є середнім гармонічним чисел a і b, якщо $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$.

Для цього він застосовує нерівність:

$$\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1} > \frac{1}{k}.$$

Спочатку при $k = 1$ він знаходить, що $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$, потім він бере 3^2 членів з $\frac{1}{5}$ по $\frac{1}{13}$, групує їх по три, і показує їх сума також більше 1, далі дається оцінка суми наступних 3^3 членів і т.п.. В результаті отримує нескінченну кількість груп з сумами більше 1.

Ці результати він отримав незалежно від французского математика Орема (Nicolas Oresme (до1330 – 1382)). В 1350 р. Орем показав розбіжність гармонічного ряду. Його доведення дійшло до нашого часу і використовується в сучасних підручниках. Він групує члени ряду наступним чином:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots \quad >$$

$$> \ 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ldots$$

Подвоюючи число членів, зібраних в послідовні групи, отримує нескінченну кількість груп з сумами більше $\frac{1}{2}$.

Необхідність сформулювати достатні умови збіжності усвідомлювали великі математики. Для додатних числових рядів (А) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ було сформульовано багато ознак збіжності. Ці ознаки збіжності базуються на порівнянні ряду (А) з різними стандартними рядами.

Так у 1768 р. Ж. Даламбер сформулював таку ознаку на основі порівняння зі збіжним рядом, членами якого є члени геометричної прогресії. Він будує варіанту

$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Якщо при достатньо великому *n* (*n* > *N*) виконується нерівність $D_n \le \mathrm{q}$, де q – стале число менше одиниці, то ряд збігається, а при $D_n \ge 1$ – розбігається.

В роботі [7] відзначається, що сучасний термін «ознака збіжності Даламбера» історично не є коректним. Даламбер розглядав питання про збіжність додатного ряду, вивчаючи розклад $(1+\mu)^m$ при довільному m в «Математичних творах» (1768 р.) при цьому він довів, що ряд дає правильні результати при $-1<\mu<1$. Англійський математик Едуард Варінг (1734 – 1798) в «Аналітичних роздумах» (1776 р.) цілком коректно сформулював цю ознаку так: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається (збігається), якщо відношення $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ при великих n менше (більше) одиниці. Формулювання цієї ознаки в термінах теорії границь належить Коші (1821 р.).

У 1821р. французький математик Огюстен Луі Коші (1789 – 1857) в своєму курсі «Алгебраїчний аналіз» сформулював ознаку також на основі порівняння зі збіжним рядом, членами якого є члени геометричної прогресії. Він будує варіанту $E_n = \sqrt[n]{a_n}$. Якщо при достатньо великому *n* (*n* > *N*) виконується нерівність $E_n \le \mathrm{q}$, де q – стале число менше одиниці, то ряд збігається, а при $E_n \ge 1$ – розбігається.

У подальшому з'ясувалося, що ознака Коші сильніше ознаки Даламбера. В усіх випадках, коли ознака Даламбера дає відповідь на поведінку ряду. цю відповідь дає і ознака Коші, а навпаки це невірно, хоча застосування ознаки Даламбера простіше.

У 1832 р. швейцарський математик Жозеф Раабе (1801 – 1859) запропонував ознаку збіжності (Z. Phys. Math), яка базується на порівнянні зі збіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ $(s>1)$ і розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Він будує варіанту $R_n = n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$.Якщо при достатньо великому n ($n>N$) виконується нерівність $R_n \geq r$, де r – стале число більше одиниці, то ряд збігається, а при $R_n \leq 1$ – розбігається. Ознака Раабе значно сильніше ознаки Даламбера. Так якщо границя $D=\lim D_n$ існує і відмінна від нуля, то для R_n існує границя R рівна $+\infty$, якщо
$D<1$ і рівна $-\infty$, якщо $D>1$.

У 1835 р. німецький математик Ернст Куммер (1810 – 1893) у статті, присвяченій дослідженню збіжності гіпергеометричних рядів (Journal fűr die reine und angewandte Mathematik), запропонував дуже загальну ознаку збіжності. Він будує варіанту $K_n = c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$, де $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ – збіжний додатний ряд. Якщо при достатньо великому n (n>N) виконується нерівність $K_n \geq \delta$, де δ – стале додатне число, то ряд збігається, а при $K_n \leq 0$ – розбігається. При $c_n = 1$ ми отримуємо, як частинний випадок, ознаку Даламбера, а при $c_n = n$ – ознаку Раабе.

При $c_n = n\ln n$ виникає нова ознака французького математика Жозефа Бертрана (1822 – 1900). У 1842 р. Бертран встановлює більш тонку логарифмічну ознаку (Journal de Mathematiques Pure et Appliquées). Він будує варіанту $B_n = \ln n\cdot[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1] = \ln n\cdot(R_n-1)$. Якщо варіанта B_n має границю (скінченну або ні) $B=\lim B_n$, то при $B_n>1$ ряд збігається, а при $B<1$ – розбігається. Ознака Бертрана більш сильніша ознаки Раабе.

В сучасній математичній літературі вказані ознаки формулюються в граничній формі.

Коли була побудована ця послідовність ознак збіжності додатних рядів, з'ясувалося, що ще у 1812 р. Гаусс довів свою ознаку (Commentationes Gotting), яка випередила на десятиліття дослідження математиків XIX ст. Вона полягала в такому: якщо для ряду (A) відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ можна подати у вигляді:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

де λ і μ – сталі, а θ_n – обмежена величина $(|\theta_n| \leq L)$, то ряд (A) збігається, якщо $\lambda>1$ або якщо $\lambda=1$, $\mu>1$, і розбігається якщо $\lambda<1$ або $\mu=1$, $\mu\leq 1$.

Випадки $\lambda < 1$ або $\lambda > 1$ приводять до ознаки Даламбера. При $\lambda = 1$ і $\mu < 1$ або $\mu > 1$ – приводять до ознаки Раабе. Якщо $\mu = 1$ приходимо до ознаки Бертрана і ряд розбігається.

Ця ознака з'явилася у зв'язку з астрономічними обчисленнями Гаусса, заснованими на розкладанні інтегралів відповідних диференціальних рівнянь в нескінченні ряди, де він зайнявся дослідженням питання про збіжність нескінченних рядів, які він зв'язав з вивченням гіпергеометричного ряду («Про гіпергеометричний ряд», 1812). Тут він вперше називає ряд збіжним, якщо всі його члени, починаючи з деякого місця, необмежено спадають. У сучасному сенсі під збіжним рядом розуміють те, що скінченні суми ряду прямують до певної границі. Гаусс перший звернув на це увагу і дав перші критерії збіжності у сучасному змісті [8].

Ці дослідження разом із заснованими на них роботами Огюстена Коші і Нільса Генріка Абеля (1802 – 1829) привели до прогресу в загальній теорії рядів.

Серед ознак збіжності додатних рядів треба відзначити ознаку, яка базується на порівнянні ряду (A) з невласним інтегралом. Це інтегральна ознака Коші, оприлюднена в тому ж курсі «Алгебраїчний аналіз» (1821 р.). Вона полягала в такому. Нехай ряд (A) можна записати у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, де $f(x)$ – неперервна додатна і монотонно спадна функція для $x \geq 1$. Тоді ряд (A) збігається або розбігається одночасно з невласним інтегралом $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

В 1742 р. вийшла робота «Трактат о флюксіях», де видатний англійський математик Колін Маклорен (1698 – 1746) при визначенні поняття суми ряду, застосовував його до виведення цієї інтегральної ознаки геометрично. Він порівняв площу між кривою $y = f(x)$ і її асимптотою з площами вписаної і описаної сходчастих фігур, що дорівнюють сумам ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Цей критерій Маклорен застосував для доведення розбіжності гармонічного ряду і збіжності узагальненого гармонічного ряду при $(s > 1)$. Тому інколи в літературі цю ознаку називають ознакою Коші-Маклорена.

У 1871 р. професор В. П. Єрмаков (1845 – 1922) у своїй доповіді на III з'їзді російських природознавців і лікарів зробив доповідь «Признак сходимости знакоположительных рядов», в якій сформулював своєрідну ознаку з тією ж областю застосування, що і інтегральна ознака Коші [4, 11]. Формулювання не містить в собі понять інтегрального числення. Вона полягала в такому.

Нехай для функції $f(x)$ виконуються умови, такі саме як і для інтегральної ознаки Коші. Тоді, якщо для достатньо великих x $(x \geq x_0)$ буде виконуватись нерівність:

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} \leq q,$$

то ряд буде збігатися при $q < 1$ і розбігається при $q \geq 1$.

Ознака Єрмакова цікава тим, що функція e^x, яка присутня в ознаці, може бути замінена іншою додатною неперервною монотонно зростаючою і неперервно диференційовною функцією $\varphi(x)$, що задовольняє нерівності $\varphi(x) > x$. Таким чином, використовуючи ознаку Єрмакова, можна отримати цілу низку нових ознак з тією ж областю застосування.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Александрова Н. В.* История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. Изд. 3-е испр. – М.: Изд. ЛКИ, 2008. – 248 с.

2. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. /Пер с французкого И. Г. Башмаковой. – М.: Изд-во иностр. лит.,1963. – 292 с.

3. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. – М.: ГИМФЛ, 1960. – 468 с.

4. *Добровольський В. А.* Василий Петрович Ермаков (1845 – 1922). – М.: Наука, 1981.– 89 с.

5. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х т. / Под. ред. А. П. Юшкевича. Т. 1. История математики с древнейших времен до начала нового времени. – М.: Наука, 1970. – 352 с.

6. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х т./ Под. ред. А. П. Юшкевича. Т. 2. Математика XVII столетия. – М.: Наука, 1970. – 496 с.

7. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х т. / Под. ред. А. П. Юшкевича. Т. 3. Математика XVIII столетия. – М.: Наука, 1972. – 300 с.

8. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. – Ч.1 /Пер. с немец. – М. – Л.: ОНТИ, 1937. – 432 с.

9. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 1. – М.: Изд. Наука,1967.– 704 с.

10. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. – М.: Наука, 1984. – 285 с.

11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т.2. – М.: Наука, 1966. – 800 с.

12. *Цейтен Г. Г.* История математики в древности и в средние века. /Пер. А. П. Юшкевича с. франц. – М. – Л.: ГТТИ, 1932. – 230 с.

13. *Цейтен Г. Г.* История математики в XVI и XVII веках /Пер. П. Новикова с немец. – М. – Л.: ОНТИ, 1938. – 456 с.