

*М. В. Грисенко
Т. В. Крижановська*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ

Основною для застосування математичних методів є формалізоване описання окремих об'єктів економіки – елементів економіки. У статті розглядається математична модель мережі транспортного елемента економіки, що охоплює автомобільний, залізничний, річний, морський та повітряний транспорт, трубопроводи та лінії електропередач. За допомогою введених транспортних потоків записуються балансові співвідношення для кожного виду транспорту: баланси перевезень, вантаження, розвантаження та простою транспорту, баланс порожнього транспорту, баланси експортно-імпорتنних перевезень.

Основой для применения математических методов есть формализованное описание отдельных объектов экономики – элементов экономики. В статье рассматривается математическая модель сети транспортного элемента экономики, которая охватывает автомобильный, железнодорожный, годовой, морской и воздушный транспорт, трубопроводы и линии электропередач. С помощью введенных транспортных потоков записываются балансовые соотношения для каждого вида транспорта: балансы перевозок, погрузки, разгрузки и простоя транспорта, баланс пустого транспорта, балансы экспортно-импортных перевозок.

The basis for the application of mathematical methods is formalized description of individual objects of the economy – elements of the economy. In this paper a mathematical model of network transport element of the economy, covering road, rail, river, sea and air transport, pipelines and power lines. With the imposed traffic recorded balance ratio for each mode of transport: balances transportation, loading, unloading and easy transport of empty transport balance, the balance of export and import traffic

Ключові слова: математична модель, елемент економіки, мережі транспортного елемента, балансові співвідношення транспортних потоків.

Транспортні потоки в мережі. Задача вдосконалення системи управління економікою на основі економіко-математичних методів – одна з головних практичних та наукових проблем сучасного етапу економічного розвитку.

Основу для застосування математичних методів є формалізоване описання окремих об'єктів економіки (математичної моделі, тобто математичного описання економічного об'єкта), так званих, елементів економіки.

© Грисенко М. В., Крижановська Т. В., 2014

Транспортний елемент економіки здійснює продуктивні зв'язки між виробництвами і здійснює транспортні послуги населенню. Основний вихід елемента – перевезення продуктів та людей, доставлених в потрібні пункти та вивезення з них; інші виходи – потоки зношеного транспорту, та транспорту, який потребує ремонту, а також вплив на оточуюче середовище. Виходи транспортного елемента – потоки нового та відремонтованого транспорту, електроенергія, паливо та інші продукти та роботи, які необхідні для функціонування транспорту як звичайного виробничого елемента.

Географічна область Q містить пункти q виробництва та споживання продукту i , в галузі I та транспортні вузли для різних видів транспорту τ . Кожен пункт виробництва та споживання є транспортним вузлом хоча б для одного виду транспорту, а частіше – для декількох зразу. Позначимо через $Q_T \subset Q$ множину пунктів – транспортних вузлів для транспорту виду $\tau \in T$.

Позначимо через $A_T = \{(q, q')_T; q, q' \in Q_T\}$ множину всіх комунікацій транспорту видів $\tau \in T$ в області Q . Пара множин $[Q_T, A_T]$ являє собою граф транспортної мережі T . Цей граф без перетинів, не завжди зв'язний. Але зв'язність графа транспортної мережі може бути досягнена шляхом розукрупнення видів транспорту.

Будемо вважати, що за характерний час усереднення по кожній комунікації перевозиться досить велика кількість продуктів та проходить досить велика кількість рухомих транспортних одиниць. Введемо тоді до розгляду потік $f_{i\tau qq'}(t)$ продукту i , привезеного в пункт q' по комунікації $(q, q')_T$ транспортом $\tau \in T$ в момент часу t , а також потік $f_{0\tau qq'}(t)$ транспорту, який прибуває із пункту q в пункт q' порожняком (для скорочення запису може ототожнюватися з потоком умовного продукту $i = 0$).

Потік $f_{i\tau qq'}(t)$ будемо вважати невід'ємним, і тому обмін продукцією i між пунктами q і q' , які з'єднані комунікаціями $(q, q')_T$ та $(q', q)_T$ будемо описувати двома зустрічними потоками $f_{i\tau qq'}(t)$ та $f_{i\tau q'q}(t)$ (один з цих потоків завжди може бути зробленим рівним нулю).

Введемо ще $g_{i\tau q}^{\pm}(t) \geq 0$ – потоки продукту i , завантажений (+) в пункті q на транспорт τ і розвантажений (–) в пункті q з транспорту τ в момент часу t . За допомогою введених потоків записуються балансові співвідношення для кожного виду транспорту, а також для сукупності транспортних і всіх інших елементів e , розміщених в області Q : баланс перевезень, вантаження, розвантаження та простою транспорту, баланс порожнього транспорту, баланси складованих і нескладованих продуктів та ін.

Баланс перевезень, вантаження, розвантаження та простою транспорту τ продукту i в пункті q будується таким чином. Швидкість зміни запасу $x_{i\tau q}$ продукту i на транспорті τ , очікуваний в пункті q розвантаження або відправки, дорівнює сумарному потоку продукту, привезеного в пункт q на транспорті τ , мінус сумарний потік продукту, відправленого з пункту q на транспорті

τ в інші пункти q'' , мінус потік продукту, направлено на розвантаження з транспорту τ в пункт q :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i\tau q}(t) &= \sum_{q' \in Q_{qT}^+} f_{i\tau q'q}(t) + g_{i\tau q}^+(t) - \sum_{q'' \in Q_{qT}^-} f_{i\tau qq''}(t + \Theta_{\tau qq''}) - g_{i\tau q}^-(t + \Theta_{i\tau q}^-) \quad (1) \\ x_{i\tau q}(t) &= f_{i\tau q} x, \quad x_{i\tau q}(t) \geq 0; \quad i \in I_\tau, i \neq 0, \tau \in T, \\ f_{i\tau q'q}(t) &= f_{i\tau q} \quad \text{при } t \in [t_0, t_0 + \Theta_{\tau q'q}), \quad f_{i\tau q'q}(t) \geq 0; \\ g_{i\tau q'q}^\pm(t) &= f_{i\tau q} \quad \text{при } t \in [t_0, t_0 + \Theta_{\tau q'q}), \quad g_{i\tau q'q}^\pm(t) \geq 0, \end{aligned}$$

де Q_{qT}^\pm – множина пунктів, звідки прибувають в пункт q (+) і вибувають з q (-) комунікації транспорту $\tau \in T$; $\Theta_{\tau q'q}, \Theta_{i\tau q}^\pm$ – тривалість пробігу з q в q' транспорту τ , завантаження і розвантаження продукту i з транспорту τ в пункт q відповідно; I_τ – множина продуктів i , перевезеним транспортом τ (умовно включає $i = 0$ – порожній транспорт, для якого записується свій баланс). В правій частині рівності (1) можуть бути відсутні потоки $\Theta_{i\tau q}^\pm$, коли про пункт q відомо, що він завжди транзитний для перевезень продукту i на транспорті τ .

Зсув аргументу в останніх двох складових балансу (1) зроблений для того, щоб виразити відправлені потоки через отримані: потік продукту, відправленого в момент часу t із пункту q в пункт q'' , дорівнює при відсутності втрат потоку того ж продукту, привезеного із пункту q'' в пункт q , але пізніше, в момент часу $t + \Theta_{\tau qq''}$. Аналогічні міркування справедливі і для потоку розвантаження та інших потоків в складених далі балансах. Скінченості тривалості переміщення транспорту із пункту в пункт та скінченості тривалості операції завантаження та розвантаження приводять до необхідності фіксації потоків продуктів на початкових проміжках часу відповідної довжини.

У квазістаціонарному режимі функціонування транспортної системи інтенсивності потоків змінюється повільно, а запаси вантажів, що простоюють, не накопичуються. Тоді зсув аргументу в (1) та в подальших балансах не відбувається, зміни запасу покладаються рівними нулю, а початкові величини потоків не фіксуються:

$$\sum_{q' \in Q_{qT}^+} f_{i\tau q'q}(t) + g_{i\tau q}^+(t) = \sum_{q'' \in Q_{qT}^-} f_{i\tau qq''}(t) - g_{i\tau q}^-(t), \quad i \in I_\tau, i \neq 0, \tau \in T, \quad (2)$$

Баланс потоків порожнього транспорту ($i = 0$) відображає регулярні холостих пробігів, простої транспорту, в також прибуття нових і вибування транспортних одиниць:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i\tau q}(t) &= \sum_{q' \in Q_{qT}^+} f_{0i\tau q'q}(t) + g_{i\tau q}^+(t) - \sum_{q'' \in Q_{qT}^-} f_{0i\tau qq''}(t + \Theta_{\tau qq''}) + \\ &+ \sum_{i \in I_q \cap I_\tau} \alpha_{\tau i} \left[g_{i\tau q}^-(t) - g_{i\tau q}^+(t + \Theta_{i\tau q}^-) \right] + \delta_{0\tau q}(t). \end{aligned} \quad (3)$$

У рівності (3) $x_{0\tau q}$ – запас порожнього транспорту τ , який чекає в пункті q відправлення або початку завантаження, $x_{\tau i}$ – число транспортних одиниць, для одиниці продукту i ; I_q – множина продуктів i , що завантажують та розвантажують в пункті q ; $\delta_{0\tau q}$ – сальдо зовнішнього транспорту τ . Початкові умови та поточні умови невід’ємності для балансу (3) такі, як і для балансу (1) за умови $i = 0$.

Наявність зовнішнього потоку $\delta_{0\tau q}(t)$ відрізняє баланс (3) від балансу (1). Ця функція враховує поповнення нового відремонтованого транспорту та вибуття транспорту на ремонт та списання. Необхідність обліку зовнішніх потоків може виникати і в балансах (1) продукту при виконанні експортно-імпортних перевезень.

Інша відмінність балансу (3) від балансу (1) зосереджена в вантажно-розвантажних компонентах: інші знаки, інші аргументи, сумування по продуктах з коефіцієнтами зведення. Ці компоненти розшифровуються таким чином: запас порожнього транспорту поповнюється після закінчення розвантаження різних продуктів, а з початком завантаження довільного продукту перестає бути порожнім. Запис і зміст членів з потоками f в обох рівностях (1) і (3) ідентичні. В трубопроводному транспорті та в передачі електроенергії відсутнє поняття рухомих транспортних одиниць і потреба у співвідношеннях (3) не виникає.

В залізничному транспорті доводиться слідкувати і за локомотивами, і за вагонами, тоді як співвідношення (3) повинні бути записані окремо для кожної комбінації, що використовується «тип локомотива – тип вагона». Найменування цієї комбінації передбачається тут зашифрованим в одному індексі τ . Подібна домовленість потрібна для річкового і автомобільного транспорту при використанні там несамохідних барж та причепів.

Зовнішній потік $\delta_{0\tau q}(t)$ порожнього транспорту, який з’являється в балансі (3) навряд чи можна вважати квазістаціонарним. Швидше за все, поповнення мережі новими транспортними одиницями та видалення старих відбувається досить рідко. Якщо в решті решт, ситуація квазістаціонарна, то нехтуючи перехідними режимами, можна користуватися спрощеною формою балансу (3), подібної до балансу (2):

$$\sum_{q' \in Q_{q\tau}^+} f_{0\tau q'q}(t) - \sum_{q'' \in Q_{q\tau}^-} f_{0\tau qq''}(t) = \sum_{i \in I_q \cap I_\tau} a_{\tau i} [g_{i\tau q}^+(t) - g_{i\tau q}^-(t)]. \quad (4)$$

Поповнення та вибуття транспорту в мережі враховуються тоді не по пунктах, а сумарно, через рівняння динаміки транспорту, який є в наявності та обмеження циркулюючого транспорту. Таким чином можна робити, коли зовнішній потік $\delta_{0\tau q}(t)$ є квазістаціонарним, але досить малий в порівнянні з іншими потоками порожнього транспорту. В інших випадках потрібно користуватися початковою формою балансу (3).

Далі запишемо серію балансових співвідношень, які пов’язують всі види транспорту τ з виробничими елементами e , розміщеними в пункті q .

Баланс продуктів, які є на складі:

$$\dot{x}_{iq}(t) = \sum_{\tau \in T_i} \left[g_{i\tau q}^-(t) - g_{i\tau q}^+(t + \Theta_{i\tau q}^-) \right] + \sum_{e \in E_{iq}^-} v_{ie}^-(t) - \sum_{e \in E_{iq}^+} v_{ie}^+, \quad (5)$$

$$x_{iq}(t) = \text{fix}, \quad x_{iq}(t) \geq 0; \quad i \in I_q^x,$$

де $x_{iq}(t)$ – поточний запас продукту i на складі транспортного пункту q ;

$v_{ie}^-(t), v_{ie}^+(t)$ – вихідний і вхідний потоки продукту i для елемента e ;

$E_{ie}^-(t), E_{ie}^+(t)$ – множини елементів e , розміщених у пункті q та випускаючих або споживаючих продукт i ;

T_i – множина видів транспорту τ , що перевозить продукт i ;

I_q^x – множина продуктів у пункті q , які є на складі.

Баланс продуктів, які не знаходяться на складі:

$$\sum_{\tau \in T_i} \left[g_{i\tau q}^-(t) - g_{i\tau q}^+(t + \Theta_{i\tau q}^-) \right] + \sum_{e \in E_{iq}^-} v_{ie}^-(t) - \sum_{e \in E_{iq}^+} v_{ie}^+ \geq 0, \quad i \in I_q^{\bar{x}}, \quad (6)$$

де $I_q^{\bar{x}}$ – множина продуктів, які не знаходяться на складі в пункті q .

Баланс продуктів, які перевозять разом за одним заходом з нульовими вантажно-розвантажними витратами:

$$\dot{x}_{iq}(t) = \sum_{\tau \in T_i} \left[\sum_{q' \in Q_{q\tau}^+} f_{i\tau q'q}(t) - \sum_{q'' \in Q_{q\tau}^-} f_{i\tau qq''}(t + \Theta_{\tau qq''}) \right] + \sum_{e \in E_{iq}^-} v_{ie}^-(t) - \sum_{e \in E_{iq}^+} v_{ie}^+, \quad (7)$$

$$x_{iq}(t_0) = \text{fix}, \quad x_{iq}(t) \geq 0; \quad i \in I_q^1, \quad a_{\tau i}(t) = 0, \quad g_{i\tau q}^\pm(t) \equiv 0,$$

$$f_{i\tau q'q}(t) \leq \sum_{i' \neq i} \gamma_{i\tau i'} f_{i'\tau q'q}(t),$$

де $f_{i\tau q'q}(t)$ – потік продукту i , який за одним заходом перевозиться разом з продуктом i' на транспорті τ ; $\gamma_{i\tau i'}$ – ознака сумісності перевезення продукту i на транспорті τ з основним продуктом i' (коли $\gamma_{i\tau i'} = 0$ – перевезення разом за одним заходом неможливе, $\gamma_{i\tau i'} > 0$ – перевезення за одним заходом можливе); I_q^1 – множина найменувань продуктів, за одним заходом завантажених та розвантажених у пункті q .

Баланс продуктів, які не вивозять і не привозять у пункт q :

$$\sum_{e \in E_{iq}^-} v_{ie}^-(t) - \sum_{e \in E_{iq}^+} v_{ie}^+ \geq 0, \quad g_{i\tau q}^\pm(t) \equiv 0, \quad f_{i\tau q'q}(t) \equiv f_{i'\tau q'q}(t) \equiv 0, \quad i \in I_q^{\bar{f}}, \quad (8)$$

де $I_q^{\bar{f}}$ – множина продуктів, що не перевозять для пункту q . В квазістаціонарному режимі із співвідношень (8) зникає тільки зсув аргументу.

Транспортні потужності. Перевезення продуктів в транспортній мережі мають обмеження. Це чотири види обмежень: обмеження за пропускною спроможністю комунікацій, обмеження за пропускною спроможністю транспортних вузлів, обмеження за потужністю вантажно-розвантажувальних механізмів, обмеження по ємності складів та стоянок в транспортних вузлах. У квазістаціонар-

ному наближенні до них ще приєднуються обмеження по розміщенню кількості рухомого складу транспорту.

Для скорочення подальших записів вводиться спеціальні позначення сумарного потоку транспорту τ (порожнього та з усіма видами вантажів) по магістралі $(q, q')_T$ із пункту q в пункт q' :

$$f_{\tau qq'}(t) = \sum_{i \in I_\tau \cap I_q^1} a_{\tau i} f_{i \tau qq'}(t), \quad (9)$$

Величина (9) обчислюється в одиницях потоку порожнього транспорту, так що при $i = 0$ коефіцієнт зведення, який визначається в поясненнях до балансу (3), покладається рівним одиниці: $a_{\tau 0} = 1$. Сумування в (9) можна провести за елементами всієї множини I_τ продуктів, що перевозять потоком транспортом τ , оскільки для продуктів, які перевозять разом за одним заходом $i \in I_q^1$ коефіцієнт зведення згідно з (7) нульовий.

Обмеження за пропускнуою спроможністю комунікацій з'являється за причини скінченності максимальної швидкості руху та скінченності гранично допустимої щільності руху, тобто числа транспортних одиниць, які одночасно знаходяться на відрізку магістралі одиничної довжини. Якщо зафіксувати швидкісний режим руху вздовж магістралі, то все зведеться до обмеження числа транспортних одиниць, які одночасно знаходяться на всій магістралі. В момент часу t на магістралі (q, q') знаходяться ті одиниці транспорту τ , які попадуть в пункт призначення q' за час від t до $t + \Theta_{\tau qq'}$ (де $\Theta_{\tau qq'}$ – тривалість проходження магістралі при фіксованому режимі швидкості руху). Число таких транспортних одиниць дорівнює $\int_0^{\Theta_{\tau qq'}} f_{\tau qq'}(t + \xi) d\xi$ або в квазістаціонарному випадку – $\Theta_{\tau qq'} f_{\tau qq'}(t)$. Якщо просумувати цей вираз за видами транспорту, використовуючи магістраль, отримаємо обмеження за пропускнуою спроможністю транспортних вузлів в такій формі:

– для магістралі з розділеними напрямками руху:

$$\sum_{\tau \in T} d_{\tau Tqq'} \frac{1}{\Theta_{\tau qq'}} \int_0^{\Theta_{\tau qq'}} f_{\tau qq'}(t + \xi) d\xi \leq V_{Tqq'}(t); \quad (10)$$

– у квазістаціонарному випадку для магістралі з розділеними напрямками руху:

$$\sum_{\tau \in T} d_{\tau Tqq'} f_{\tau qq'}(t) \leq V_{Tqq'}(t); \quad (11)$$

– для магістралі з нерозділеними напрямками руху:

$$\sum_{\tau \in T} \left[d_{\tau Tqq'} \frac{1}{\Theta_{\tau qq'}} \int_0^{\Theta_{\tau qq'}} f_{\tau qq'}(t + \xi) d\xi + d_{T\tau q'q} \frac{1}{\Theta_{\tau q'q}} \int_0^{\Theta_{\tau q'q}} f_{\tau q'q}(t + \xi) d\xi \right] \leq V_{T\|qq'\|}(t); \quad (12)$$

– у квазістаціонарному випадку для магістралі з нерозділеними напрямками руху:

$$\sum_{\tau \in T} \left[d_{T\tau q q'} f_{\tau q q'}(t) + d_{T\tau q' q} f_{\tau q' q}(t) \right] \leq V_{T\|qq'}(t); \quad (13)$$

де $d_{T\tau q q'}$ – коефіцієнт приведення транспорту τ до представника T рухаючись по магістралі $(q, q')_T$ із пункту q в пункт q' ; $V_{Tq q'}(t)$, $V_{T\|qq'}(t)$ – пропускна спроможність комунікації із пункту q в пункт q' або туди або назад для множини видів транспорту T .

В останньому випадку гранична щільність руху не залежить від видів транспорту, який одночасно рухається по магістралі зі своїми характерними швидкостями. Тоді під $V_{Tq q'}$ в (10) можна розуміти граничне число одиниць транспорту з множини T на всій магістралі, поділене на $\Theta_{Tq q'}$ – тривалість проходження магістралі цим представником, а $d_{T\tau q q'}$ – відношення тривалості $d_{\tau q q'}$ руху транспорту τ до $\Theta_{Tq q'}$.

Обмеження за пропускною спроможністю транспортного вузла q пов'язане з можливостями системи управління транспортним вузлом та нормами безпеки (наприклад, потік літаків не може перевищувати граничного потоку, що визначається можливостями диспетчерської служби аеропорту). Це обмеження трактується, подібно до попереднього, як обмеження сумарного числа транспортних одиниць, які одночасно знаходяться в зоні транспортного вузла (тобто, які прибувають, відбуваються, розвантажуються та завантажуються). Враховуючи позначення (9) це можна записати у вигляді:

$$\sum_{\tau \in T} \left\{ \left| d_{T\tau q} \frac{1}{\Theta_{\tau q}} \left[\sum_{q' \in Q_{qT}^+} \int_0^{\Theta_{\tau q}} f_{\tau q' q}(t + \xi) d\xi + \sum_{q'' \in Q_{qT}^-} \int_0^{\Theta_{\tau q}} f_{\tau q q''}(t + \Theta_{\tau q q''} + \xi) d\xi \right] \right| + \right. \\ \left. + \sum_{i \in I_q \cap I_{\tau}} a_{\tau i} \left[d_{T\tau q}^+ \frac{1}{\Theta_{i\tau q}^+} \int_0^{\Theta_{i\tau q}^+} g_{i\tau q}^+(t + \xi) d\xi + d_{i\tau q}^- \frac{1}{\Theta_{i\tau q}^-} \int_0^{\Theta_{i\tau q}^-} g_{i\tau q}^-(t + \xi) d\xi \right] \right\} \leq V_{Tq}(t) \quad (14)$$

де $d_{T\tau q}$, $d_{i\tau q}^{\pm}$ – коефіцієнти зведення, подібні до $d_{T\tau q q'}$ в (10)-(13); $\Theta_{\tau q}$ – тривалість знаходження транспорту τ , що вибуває або прибуває до вузла q ; V_{Tq} – пропускна спроможність диспетчерської служби транспортного вузла q для множини видів транспорту T .

У квазістаціонарному режимі усереднені потоки в (14) можуть бути наближено замінені на самі потоки, як це було зроблено в (10) – (13):

$$\sum_{\tau \in T} \left\{ \left| d_{T\tau q} \left[\sum_{q' \in Q_{qT}^+} f_{\tau q' q}(t) + \sum_{q'' \in Q_{qT}^-} f_{\tau q q''} \right] \right| + \right. \\ \left. + \sum_{i \in I_q \cap I_{\tau}} a_{\tau i} \left[d_{i\tau q}^+ g_{i\tau q}^+(t) + d_{i\tau q}^- g_{i\tau q}^-(t) \right] \right\} \leq V_{Tq}(t). \quad (15)$$

Обмеження за потужністю вантажно-розвантажувальних механізмів в транспортному вузлі q стримують сумарні інтенсивності завантаження g_{iTq}^+ та розвантаження g_{iTq}^- різних продуктів на різні види транспорту і, можливо, потоки ввезення v_{ie}^+ та вивезення v_{ie}^- для підприємств, які розміщені в пункті q (наприклад, при використанні транспортногo складу в пункті q 0:

$$\sum_{i \in I_i \cap I_e} \left\{ \sum_{\tau \in T_i} d_{j\tau q}^+ \frac{1}{\Theta_{i\tau q}^+} \left[\int_0^{\Theta_{i\tau q}^+} g_{i\tau q}^+(t + \xi) d\xi + d_{j\tau q}^- \frac{1}{\Theta_{i\tau q}^-} \int_0^{\Theta_{i\tau q}^-} g_{i\tau q}^-(t + \xi) d\xi \right] + \right. \\ \left. + \sum_{e \in E_{ie}^+} d_{jieq}^+ \frac{1}{\Theta_{ieq}^+} \int_0^{\Theta_{ieq}^+} v_{ie}^+(t + \xi) d\xi + \sum_{e' \in E_{ie}^-} d_{jie'q}^- \frac{1}{\Theta_{ieq}^-} \int_0^{\Theta_{ieq}^-} v_{ie'}^+(t + \xi) d\xi \right\} \leq V_{jq}(t), \quad (16)$$

або в квазістаціонарному режимі:

$$\sum_{i \in I_i \cap I_e} \left\{ \sum_{\tau \in T_i} \left[d_{j\tau q}^+ g_{i\tau q}^+(t) + d_{j\tau q}^- g_{i\tau q}^-(t) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{e \in E_{ie}^+} d_{jieq}^+ v_{ie}^+(t) + \sum_{e' \in E_{ie}^-} d_{jie'q}^- v_{ie'}^+(t) \right\} \leq V_{jq}(t). \quad (17)$$

де $V_{jq}(t)$ – виробник вантажно-розвантажних механізму виду j в транспортному вузлі q ; $d_{jieq}^\pm, d_{j\tau q}^\pm$ – коефіцієнти зведення до потужності j вантажних (+) та розвантажних (–) робіт з продуктом i для елемента e і транспорту τ відповідно; I_j – множина продуктів, завантажених і розвантажених механізмами виду $j \in I_q^\pm$.

У співвідношеннях (16) і (17) передбачається, що вантажні та розвантажні роботи можуть проводитись одним і тим же механізмом, але займають різний його час роботи. Спеціалізацію механізмів можна враховувати звуженням меж сумування або перетворенням на нуль коефіцієнтів зведення для робіт, які не виконуються.

Обмеження за ємності складу та стоянок транспортногo вузла q в готовому вигляді такі:

$$\sum_{i \in I_{jq}^x} d_{ji}^x x_{iq}(t) \leq V_{jq}^x(t), \quad \sum_{\tau \in T} d_{T\tau} \sum_{i \in I_q} a_{\tau i} x_{i\tau q}(t) \leq V_{Tq}^x(t), \quad (18)$$

де $V_{jq}^x(t)$ – ємність типа j вузла q ; d_{ji}^x – частина ємності j , яка зайнята продуктом i ; I_{jq}^x – множина продуктів i , що зберігаються в ємності $j \in I_q^x$. Аналогічний зміст має права частина і коефіцієнт зведення у другій нерівності (18), яка відсутня в квазістаціонарному наближенні.

Останній тип обмежень потужностей – за кількістю транспорту, який є в наявності. Цей тип обмежень необхідний в квазістаціонарному описанні залізнич-

ного, автомобільного, водного та повітряного транспорту. В трубопроводному транспорті та в передачі електроенергії, де відсутні транспортні одиниці, такого обмеження немає. Зміст обмеження полягає в тому, що сумарна кількість транспорту певного виду, що є в наявності в мережі $[Q_T, A_T]$ не повинно перевищувати кількості $V_{\tau Q}(t)$.

Кількість транспорту в мережі складається з кількості рухомого транспорту, завантаженого та розвантаженого транспорт, а також транспорту, який простоює. Перші три компоненти вже підраховувались в (10) – (13). А для останньої в (1) та (3) були введені спеціальні змінні $x_{i\tau q}$, так, що сумарна кількість транспорту в кожен момент часу виявляється рівною:

$$V_{\tau Q}(t) = \sum_{q \in Q} \left\{ \sum_{q' \in Q_{qT}} \int_0^{\Theta_{\tau qq'}} f_{\tau qq'}(t + \xi) d\xi + \sum_{i \in I_x} a_{\tau i} x_{\tau iq}(t) + \sum_{i \in I_e \cap I_\tau} a_{\tau i} \left[\int_0^{\Theta_{i\tau q}^+} g_{i\tau q}^+(t + \xi) d\xi + \int_0^{\Theta_{i\tau q}^-} g_{i\tau q}^-(t + \xi) d\xi \right] \right\}. \quad (19)$$

Цей підрахунок був здійснений без припущення квазістаціонарності потоків. У квазістаціонарному випадку відсутні змінні $x_{i\tau q}$, які відповідають кількості транспорту, який простоює в кожному пункті мережі. Вважається тільки, що сума повинна бути невід'ємною, в результаті замість (19) використовується наближена рівність:

$$\sum_{q \in Q} \left\{ \sum_{q' \in Q_{qT}} \Theta_{\tau qq'} f_{\tau qq'}(t) + \sum_{i \in I_e \cap I_\tau} a_{\tau i} \left[\Theta_{i\tau q}^+ g_{i\tau q}^+(t) + \Theta_{i\tau q}^- g_{i\tau q}^-(t) \right] \right\} \leq V_{\tau Q}(t). \quad (20)$$

Через властивості рухомості транспортних одиниць їх кількість може збільшуватись та зменшуватись миттєво без витрат монтажних робіт, подібно до запасу довільного продукту, який зберігається. Зміна кількості, яким можна користуватися, визначається зовнішніми потоками $\delta_{0\tau q}$ порожнього транспорту, введеному в баланс (3):

$$V_{\tau Q}(t) = V_{\tau Q}(t_0) + \sum_{q \in Q} \left\{ \int_{t_0}^t \delta_{0\tau q}(\xi) d\xi \right\} \leq V_{\tau Q}(t) \vartheta_{TQ}(t), \quad t \in T. \quad (21)$$

У квазістаціонарному наближенні кількість транспорту, яким можна користуватися, задається зразу для всієї мережі:

$$V_{\tau Q}(t) = V_{\tau Q}(t_0) + \Delta V_{\tau Q}(t) \leq V_{\tau Q}(t) \vartheta_{TQ}(t), \quad \tau \in T. \quad (22)$$

У співвідношенні (22) $V_{\tau Q}(t_0)$ початкова кількість транспорту в мережі; $\Delta V_{\tau Q}(t)$ – зміна кількості транспорту за час від t_0 до t за рахунок списання зношеного транспорту, отримання нових транспортних одиниць, передачі в інші мережі або отримання з інших мереж – підраховується зростаючим підсумком

від t_0 до t , є не обов'язково монотонною та знакосталою функцією); $V_{\tau Q}(t)$ – максимально можлива кількість транспорту τ в мережі Q_T ; $\vartheta_{TQ}(t)$ – функція відкриття ($\vartheta = 1$) і закриття ($\vartheta = 0$) транспортної мережі Q_T .

Рівність (22) є наслідком балансів (1) і (3) та означення (9). Для того, що у цьому переконатись, потрібно проінтергувати рівняння балансів (1) і (3) від t_0 до t . Отримані вирази для $[x_{i\tau q}(t) - x_{i\tau q}(t_0)]$ потрібно підставити в праву частину рівності (19), попередньо віднявши від обох частин цієї рівності відповідні частини при $t = t_0$. В результаті зліва одержимо $[V_{\tau Q}(t) - V_{\tau Q}(t_0)]$, а справа – суму інтегралів від $\delta_{0\tau q}(\xi)$, записану в (21). Таким чином, при використанні вихідної форми балансів (1) і (3) із змінними $x_{i\tau q}$ та $\delta_{0\tau q}$ нову змінну $V_{\tau Q}$ можна було б і не вводити, а зразу обмежити праву частину (20) правою частиною (21). У квазістаціонарному наближенні нова змінна необхідна.

Властивості рухомості мають також деякі види механізмів для завантаження і розвантаження транспорту, тому динаміки відповідних потужностей V_{jq} з (16) можна подати у вигляді (21).

Витрати сировини на транспорті. Витрати сировини на транспорті містять дві групи компонент. Одна з них не залежить від величини випуску транспортного елемента і пов'язана з кількістю частин елемента. Це витрати на поточний ремонт та функціонування транспортних комунікацій, транспортних вузлів та рухомого состава. Друга група компонент залежить від величини випуску транспортного елемента. Це, наприклад, пальне або електроенергія та мастильні матеріали. Потік цих витрат в основному визначається фізичною роботою в одиницю часу, що виробляється при перевезенні корисного вантажу та порожнього состава. Робота за одиницю часу на комунікації $(q, q')_T$ є добутком ваги на довжину комунікації. Подібну ж природу мають витрати на роботи на завантаження та розвантаження.

Потрібні потоки продуктів та ремонтні роботи i' на транспортні потужності з (10) – (19) всієї мережі T в Q :

$$v_{i'TQ}^1(t) = \sum_{(q,q')_T \in A_T} a_{i'Tqq'}^1 V_{Tqq'}(t) + \sum_{\tau \in T} a_{i'\tau}^1 V_{\tau Q}(t) + \sum_{q \in Q_T} \left[a_{i'Tq}^1 V_{Tq} + \sum_{j \in T_e} a_{ij}^1 V_{iq}(t) + \sum_{j \in T_e^x} a_{ij}^{1x} V_{jq}^x(t) \right] \dots \dots \dots (23)$$

де $a_{i'Tqq'}^1$ – витрати продукту i' на одиницю пропускної спроможності комунікації $(q, q')_T$ з пункту q в пункт q' ; $a_{i'\tau}^1$ – витрати продукту i' на утримання одиниці транспорту τ ; $a_{i'Tq}^1$ – витрати продукту i' на одиницю пропускної спроможності вузла q для групи видів транспорту T ; a_{ij}^1 – витрати продукту i' на утримання одиниці потужності j по завантаженню та розвантаженню; a_{ij}^{1x} – витрати продукту i' на одиницю складської ємності виду j .

Потрібні потоки продуктів на перевезення:

$$v^2_{i\tau Q}(t) = \sum_{(q,q')_T \in A_T} \sum_{\tau \in T} \sum_{i \in I_\tau} a^2_{i'\tau qq'} \frac{1}{\Theta_{\tau qq'}} \int_0^{\Theta_{\tau qq'}} f_{i\tau qq'}(t + \xi) d\xi \quad (24)$$

або в квазістаціонарному режимі:

$$v^2_{i\tau Q}(t) = \sum_{(q,q')_T \in A_T} \sum_{\tau \in T} \sum_{i \in I_\tau} a^2_{i'\tau qq'} f_{i\tau qq'}(t) \quad (25)$$

де $a^2_{i'\tau qq'}$ – витрати сировини i' (палива) на одиницю продукту i , що привозять транспортом τ із пункту q в пункт q' ($i=0$ порожній транспорт).

Потрібні потоки продуктів на завантаження – розвантаження та на зберігання продуктів на складах транспортних вузлів в області Q :

$$v^3_{iQ}(t) = \sum_{q \in Q} \left\{ \sum_{\tau \in T_i} \sum_{i \in I_\tau} \left[a^{3+}_{i'\tau q} \frac{1}{\Theta^+_{i\tau q}} \int_0^{\Theta^+_{i\tau q}} g_{i\tau q}(t + \xi) d\xi + \right. \right. \\ \left. \left. + a^{3-}_{i'\tau q} \frac{1}{\Theta^-_{i\tau q}} \int_0^{\Theta^-_{i\tau q}} g_{i\tau q}(t + \xi) d\xi \right] + \sum_{i \in I^x_q} a^{3x}_{i'iq} x_{iq}(t) \right\} \quad (26)$$

або в квазістаціонарному режимі:

$$v^3_{iQ}(t) = \sum_{q \in Q} \left\{ \sum_{\tau \in T_i} \sum_{i \in I_\tau} \left[a^{3+}_{i'\tau q} g^+_{i\tau q}(t) + a^{3-}_{i'\tau q} g^-_{i\tau q}(t) \right] + \sum_{i \in I^x_q} a^{3x}_{i'iq} x_{iq}(t) \right\}, \quad (27)$$

де $a^{3\pm}_{i'\tau q}$ – витрати продукту i' на одиницю потоку завантаженого та розвантаженого продукту i для транспорту τ в пункті q ; $a^{3x}_{i'iq}$ – витрати продукту i' на зберігання одиниці продукту i для транспорту τ в пункті q .

Потрібні трудові витрати обчислюються за формулами, які структурно повторюють (23) – (27).

Експортно-імпортні перевезення. Експортно-імпортні перевезення можуть здійснюватися як «своїм» та і «чужим» транспортом. Для того, що врахувати цю специфіку, введемо такі позначення:

$i \in I^{\pm}_Q$ – імпортований або експортований продукт (він може бути вироблений або (і) спожитий усередині області Q ; за необхідності розрізнення експортно-імпортного та місцевого продуктів, наприклад, за якістю, їм присвоюють різні індекси;

$f_{i\tau e Q' q}(t)$ – задані на проміжку часу $[t_0, t_1]$ потоки імпорту продукту i , що привозять із пункту Q' в $q \in \Gamma_{Q'\tau}$, здійснюють своїм ($e=1$) та чужим ($e=2$) транспортом виду τ , включаючи потоки порожнього транспорту ($e=0$);

$\Gamma_{Q'\tau} \in Q$ – множина пограничних з Q' пунктів q , куди приїжджає із Q' і звідки виїжджає транспорт τ ;

$\Phi_{iQ Q'}(t)$ – задані на проміжку часу $[t_0, t_1]$ сумарний потік експорту продукту i із пункту Q в пункт Q' ;

$f_{iteqQ'}(t)$ – шуканий розподіл сумарного експортного потоку по пунктах покидання $Q : q \in \Gamma_{Q'\tau}$ та по видам транспорту τ , свого ($e = 1$) та чужого ($e = 2$);

$f_{iteqq'}(t)$ – внутрішні перевезення, які здійснюють своїм ($e = 1$) та чужим ($e = 2$) транспортом;

$g_{iteq}^{\pm}(t)$ – завантаження – розвантаження «свого» та «чужого» транспорту;

$Q_{\tau 2} \subset Q$ – множина пунктів q , по якому може циркулювати «чужий» транспорт τ , не перевищуючи фіксований ліміт часу перебування в Q ;

$\Theta_{Q'\tau 1}$ – заданий час перебування «свого» транспорту в «чужій» множині Q' .

До співвідношень (1) – (27) додаються ще чотири види балансів:

Умова вивозу експортованого продукту з Q в Q' :

$$\sum_{e=1,2} \sum_{\tau \in T_i} \sum_{q \in \Gamma_{Q'\tau}} f_{iteqQ'}(t) = \varphi_{iQQ'}(t) \quad (28)$$

Умова повернення чужого транспорту в Q' :

$$\sum_{q \in \Gamma_{Q'\tau}} \sum_{i \in I_x} a_{\tau i} f_{i\tau 2qQ'}(t) = \sum_{q \in \Gamma_{Q'\tau}} \sum_{i \in I_x} a_{\tau i} f_{i\tau 2qQ'}(t + \Theta_{\tau qQ'}) \quad (29)$$

Умова невиходу чужого транспорту за межі $Q_{\tau 2}$:

$$f_{i\tau 2qq'}(t) \equiv g_{i\tau 2q}^{\pm}(t) \equiv 0, \text{ якщо } q \text{ або (i) } q' \notin Q_{\tau 2} \quad (30)$$

Зв'язок з сумарними перевезеннями, завантаженням, розвантаженням продукту i :

$$f_{i\tau qq'}(t) = \sum_{e=1,2} f_{iteqq'}(t), \quad g_{i\tau q}^{\pm}(t) = \sum_{e=1,2} g_{iteq}^{\pm}(t). \quad (31)$$

Співвідношення (1)-(27) підлягають формальним змінам, які ми перерахуємо нижче: 1) до змінних $f_{i\tau qq'}(t)$, $g_{i\tau q}^{\pm}(t)$ дописують індекс $e = 1, 2$;

2) до множин $Q_{q\tau}^{\pm}$ для пограничних пунктів $q \in \Gamma_{Q'\tau}$ додається умовний пункт Q' ;

3) співвідношення, які повинні виконуватись для кожного виду транспорту τ , записується окремо для $\tau 1$ і $\tau 2$ (окрім нерівності (19), яке має місце тільки для $\tau 1$);

4) до сумування по τ додається сумування по $e = 1, 2$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Anthony M., Biggs N.* Mathematics for economics and finance. Methods and modelling. Cambridge University Press. 1998.
2. *Angel de la Fuente.* Mathematical methods and models for economics. – Cambridge University Press, 2000.
3. *Грисенко М.В.* Математика для економістів: Підручник. – К: ВПЦ «Київський університет», 2012.
4. *Дудки Л.М.* Оптимальный материальный баланс народного хозяйства. – М.: Экономика, 2006.
5. *Математические вопросы формирования экономических моделей* / Под ред. К.А. Багриновского и Е.Л. Берлянда. – Новосибирск: Наука, 2003.