УДК 517.564/565

О. О. Кільчинський
Є. В. Массалітіна

УТОЧНЕНИЙ МЕТОД ПОМ’ЯКШЕННЯ НЕВ’ЯЗОК ДЛЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ

Пропонується безгіпотезний наближений метод аналітичного дослідження напружено-деформованого стану анізотропної пластини, який враховує її пружну податливість на поперечні зсуви та стискання. Конкурентність методу підтверджено при порівнянні результатів його застосування до задачі про згин пластини з відомими точним [1] та наближеним [2] розв’язками.

Предлагается безгипотезный приближенный метод для аналитического исследования напряженно-деформированного состояния пластины, который учитывает ее упругую податливость на поперечный сдвиг и сжатие. Конкурентность метода подтверждена при сравнении результатов его применения к задаче про изгиб пластины с известными точным [1] и приближенным [2] решениями.

Features hypothesisless approximate method for the analytical study of stress-strain state of a plate, which takes into account the elastic compliance of transverse shear and compression. The competitiveness of the method was confirmed by comparison of the results of its application to the problem of bending of a plate with known exact [1] and close [2] solutions.

Ключові слова: уточнений метод, анізотропна пластина, напружений стан, податливість на зсув та стискання.

Вступ. За виключенням окремих випадків точне розв’язування тривимірних крайових задач лінійної теорії пружності для пластин та оболонок пов’язане зі значними математичними труднощами. Тому при розв’язанні таких задач доводиться застосовувати наближені методи. Наближені аналітичні методи виходять з можливості зведення вихідної тривимірної задачі до значно простішої – двовимірної. Типові методи такого зведення – метод гіпотез, метод розкладень у степеневий ряд, асимптотичний – вже достатньо відомі [1], [3]. Як один з можливих варіантів зведення тривимірної задачі до двовимірної нами пропонується метод пом’якшення нев’язок. Метод полягає в поєднанні апроксимації законів зміни переміщень та напружень відрізками ряду Маклорена (по товщині пластини) з узгодженням апроксимацій на основі процедури *пом’якшення нев’язок* − мінімізації можливих неузгодженостей оптимальним підбором параметрів деформування. Метод не потребує додаткових припущень про нестисливість та незмінність кутів елемента нормалі до серединної поверхні, можливість нехтування окремими складовими тензора напружень тощо.

I. Постановка задачі з позицій тривимірної теорії пружностей. Розглянемо задачу про деформований та напружений стан пружної ортотропної пластини сталої товщини *h* під дією об’ємних та поверхневих сил. Виберемо ортогональну систему координат (α,β,z) так, щоб координатна поверхня (α,β) співпадала з серединною площиною пластини, координата *z* змінювалася по нормалі до серединної площини $(-0{,}5h \le z \le 0{,}5h)$, а головні напрямки пружності співпадали з координатними лініями. Коефіцієнти Ламе для цих ліній позначимо через H_1, H_2, H_3. У вибраній системі координат ці коефіцієнти змінюються за законом:

$$H_1 = H_1(\alpha,\beta),\ H_2 = H_2(\alpha,\beta)\ ,\ H_3 = 1. \tag{1}$$

Проекції вектора переміщень для точок (α,β,z) пластини позначимо через u_α, u_β, u_z. Через $e_\alpha, e_\beta, e_z, e_{\alpha\beta}, e_{\alpha z}, e_{\beta z}$ та $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_z, \tau_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha z}, \tau_{\beta z}$ позначимо компоненти тензорів деформацій та напружень. Зусилля T_1, T_2, S, N_1, N_2 та моменти M_1, M_2, G визначимо за формулами:

$$T_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_\alpha dz, T_2 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_\beta dz, S = \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{\alpha\beta} dz, N_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{\alpha z} dz, N_2 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{\beta z} dz,$$

$$M_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} z\sigma_\alpha dz, M_2 = \int_{-0,5h}^{0,5h} z\sigma_\beta dz, G = \int_{-0,5h}^{0,5h} z\tau_{\alpha\beta} dz. \tag{2}$$

1

На граничних площинах $z = \mp 0{,}5h$ напруження задаватимемо рівностями:

$$\tau_{\alpha z}\Big|_{z=-0,5h} = -X^-, \tau_{\beta z}\Big|_{z=-0,5h} = -Y^-, \sigma_z\Big|_{z=-0,5h} = -Z^-;$$

$$\tau_{\alpha z}\Big|_{z=0,5h} = X^+, \tau_{\beta z}\Big|_{z=0,5h} = Y^+, \sigma_z\Big|_{z=0,5h} = Z^+, \tag{3}$$

де X^-, Y^-, Z^- та X^+, Y^+, Z^+ − задані функції змінних координат (α,β).

На торцевих поверхнях $\alpha = const, \beta = const$ умови для напружень задовольнятимемо, виходячи з принципу Сен Венана ([1], [4]), у «пом’якшеній» формі − лише по зусиллях та моментах. Поставлена задача належить до крайових задач тривимірної теорії пружності з якою пов’язано чотири відомимі [1] групи рівнянь (наводяться нижче).

1група (співвідношення між деформаціями та переміщеннями):

$$e_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta} u_\beta, e_\beta = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} u_\alpha,$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{u_\alpha}{H_1} + \frac{H_2}{H1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{u_\beta}{H_2}, \tag{4}$$

$$e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, e_{\alpha z} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z}, e_{\beta z} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_z}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial z}.$$

2 група (диференціальні рівняння рівноваги у напруженнях):

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2\sigma_\alpha)-\sigma_\beta\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1^2\tau_{\alpha\beta})+\frac{\partial}{\partial z}(H_1H_2\tau_{\alpha z})+K_1H_1H_2=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1\sigma_\beta)-\sigma_\alpha\frac{\partial H_1}{\partial\beta}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2^2\tau_{\alpha\beta})+\frac{\partial}{\partial z}(H_1H_2\tau_{\beta z})+K_2H_1H_2=0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2\tau_{\alpha n})+\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1\tau_{\beta n})+\frac{\partial}{\partial z}(H_1H_2\sigma_z)+K_3H_1H_2=0,$$

де K_1, K_2, K_3- проекції вектора об'ємних сил на дотичні до координатних ліній α,β,z.

3 група (диференціальні рівняння рівноваги у зусиллях та моментах):

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2T_1)-T_2\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1^2S)=-H_1H_2(\langle K_1\rangle+X_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1T_2)-T_1\frac{\partial H_1}{\partial\beta}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2^2S)=-H_1H_2(\langle K_2\rangle+Y_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2N_1)+\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1N_2)+\frac{\partial}{\partial z}(H_1H_2\sigma_z)=-H_1H_2(\langle K_3\rangle+Z_2), \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2M_1)-M_2\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1^2G)=H_1H_2(N_1-hX_1-\langle zK_1\rangle),$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1M_2)-M_1\frac{\partial H_1}{\partial\beta}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2^2G)=H_1H_2(N_2-hY_1-\langle zK_2\rangle)\cdot$$

У рівняннях системи (6) праві частини визначаються через проекції вектора об'ємних сил та граничні напруження (3) за формулами:

$$\langle K_i\rangle=\int_{-0,5h}^{0,5h}K_i dz,\ \ \langle zK_i\rangle=\int_{-0,5h}^{0,5h}zK_i dz\ \ (i=1,2,3),$$

$$X_1=0{,}5(X^+-X^-),\ \ Y_1=0{,}5(Y^+-Y^-),\ \ Z_1=0.5(Z^+-Z^-), \quad (7)$$

$$X_2=X^++X^-,\ \ Y_2=Y^++Y^-,\ \ Z_2=Z^++Z^-.$$

Систему (6) і рівності (7) можна отримати, якщо кожне з рівнянь (5) множити на степені z^0, z^1 та інтегрувати по z від $z=-0{,}5h$ до $z=0{,}5h$, застосовуючи співвідношення (2).

4 група (співвідношення закону Гука для ортотропного тіла):

$$e_\alpha=a_{11}\sigma_\alpha+a_{12}\sigma_\beta+a_{13}\sigma_z,\quad e_{\beta z}=a_{44}\tau_{\beta z,}$$

$$e_\beta=a_{12}\sigma_\alpha+a_{22}\sigma_\beta+a_{23}\sigma_z,\quad e_{\alpha z}=a_{55}\tau_{\alpha z}, \quad (8)$$

$$e_z=a_{13}\sigma_\alpha+a_{23}\sigma_\beta+a_{33}\sigma_z,\quad e_{\alpha\beta}=a_{66}\tau_{\alpha\beta}.$$

Коефіцієнти a_{ij} можна подати через технічні сталі за формулами:

$$a_{11}=\frac{1}{E_1},a_{12}=-\frac{\nu_{12}}{E_2}=-\frac{\nu_{21}}{E_1},a_{13}=-\frac{\nu_{13}}{E_3}=-\frac{\nu_{31}}{E_1},$$

$$a_{22}=\frac{1}{E_2},a_{23}=-\frac{\nu_{23}}{E_3}=-\frac{\nu_{32}}{E_2},a_{33}=\frac{1}{E_3}, \quad (9)$$

$$a_{44}=\frac{1}{G_{23}},a_{55}=\frac{1}{G_{13}},a_{66}=\frac{1}{G_{12}}.$$

Тут E_1, E_2, E_3 – модулі Юнга на розтягнення-стискання у напрямках α, β, z; G_{23}, G_{23}, G_{12} – модулі зсуву у поверхнях $\alpha = const, \beta = const, z = const$; $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$ – коефіцієнти Пуассона. Співвідношення (6) можна подати також у вигляді:

$$\begin{gathered}\sigma_\alpha = b_{11}e_\alpha + b_{12}e_\beta + b_{13}e_z, \quad \tau_{\beta z} = b_{44}e_{\beta z}, \\ \sigma_\beta = b_{12}e_\alpha + b_{22}e_\beta + b_{23}e_z, \quad \tau_{\alpha z} = b_{55}e_{\alpha z}, \\ \sigma_z = b_{13}e_\alpha + b_{23}e_\beta + b_{33}e_z, \quad \tau_{\alpha\beta} = b_{66}e_{\alpha\beta}.\end{gathered} \tag{10}$$

Мають місце формули:

$$\begin{gathered}b_{11} = \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{1-\nu^2}E_1, b_{12} = \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{1-\nu^2}E_1, b_{13} = \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{1-\nu^2}E_1, \\ b_{22} = \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{1-\nu^2}E_2, b_{23} = \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{1-\nu^2}E_2, b_{33} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{1-\nu^2}E_3, \\ b_{44} = G_{23}, b_{55} = G_{13}, b_{66} = G_{12}, \nu^2 = \nu_{12}\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{13} + 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}.\end{gathered} \tag{11}$$

Наведені співвідношення та рівняння складають основу подальшого наближеного методу.

II. Основні положення методу пом'якшення

Апроксимація переміщень та деформовано-напруженого стану. При визначенні переміщень, деформацій та напружень пластини надалі розрізнятимемо *вхідні характеристики*, отримані безвідносно до рівнянь рівноваги (5) (їх позначатимемо додатковим верхнім індексом (1)) та *вихідні* (*рівноважні*) *характеристики*, отримані з урахуванням рівнянь (5) (їх позначатимемо додатковим верхнім індексом (2)). Переміщення довільної точки (α, β, z) пластини апроксимуватимемо законом:

$$u_\alpha = u_\alpha^{(1)} = u + z\varphi, \; u_\beta = u_\beta^{(1)} = v + z\psi, \; u_z = u_z^{(1)} = w + z\varepsilon + 0{,}5z^2\chi, \tag{12}$$

де $u, v, w, \varphi, \psi, \varepsilon, \chi$ є параметрами деформування, функціями від α, β. Звідси за формулами (4) отримуємо закон зміни деформацій:

$$\begin{gathered}e_\alpha = e_\alpha^{(1)} = \varepsilon_\alpha + z\,æ_\alpha, \; e_\beta = e_\beta^{(1)} = \varepsilon_\beta + z\,æ_\beta, \; e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^{(1)} = \varepsilon_{\alpha\beta} + z\,æ_{\alpha\beta}, \\ e_z = e_z^{(1)} = \varepsilon + z\chi, \; e_{\alpha z} = e_{\alpha z}^{(1)} = \gamma_1 + z\delta_1 + z^2\eta_1, \; e_{\beta z} = e_{\beta z}^{(1)} = \gamma_2 + z\delta_2 + z^2\eta_2,\end{gathered} \tag{13}$$

де

$$\begin{gathered}\varepsilon_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}v, \; æ_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\psi, \\ \varepsilon_\beta = \frac{1}{H_2}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}u, \; æ_\beta = \frac{1}{H_2}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\varphi, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{u}{H_1} + \frac{H_2}{H1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{v}{H_2}, \; æ_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\varphi}{H_1} + \frac{H_2}{H1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\psi}{H_2}, \\ \gamma_1 = \varphi + \frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha}, \delta_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}, \eta_1 = \frac{1}{2H_1}\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}, \\ \gamma_2 = \psi + \frac{1}{H_2}\frac{\partial w}{\partial\beta}, \delta_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta}, \eta_2 = \frac{1}{2H_2}\frac{\partial\chi}{\partial\beta}.\end{gathered} \tag{14}$$

Закон зміни напружень виводимо за формулами (2), (8), (10), (11), (13):

$$\sigma_\alpha=\sigma_\alpha^{(1)}=\frac{1}{h}T_1+\frac{12z}{h^3}M_1,\sigma_\beta=\sigma_\beta^{(1)}=\frac{1}{h}T_2+\frac{12z}{h^3}M_2,\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\alpha\beta}^{(1)}=\frac{1}{h}S+\frac{12z}{h^3}G$$

$$\sigma_z=\sigma_z^{(1)}=\frac{1}{a_{33}}\left(\varepsilon-\frac{a_{13}T_1+a_{23}T_2}{h}\right)+\frac{z}{a_{33}}\left(\chi-12\frac{a_{13}M_1+a_{23}M_2}{h^3}\right), \quad (15)$$

$$\tau_{\alpha z}=\tau_{\alpha z}^{(1)}=\frac{\gamma_1+z\delta_1+z^2\eta_1}{a_{55}},\tau_{\beta z}=\tau_{\beta z}^{(1)}=\frac{\gamma_2+z\delta_2+z^2\eta_2}{a_{44}}.$$

Тут $T_1=h(b_{11}\varepsilon_\alpha+b_{12}\varepsilon_\beta+b_{13}\varepsilon),\ T_2=h(b_{12}\varepsilon_\alpha+b_{22}\varepsilon_\beta+b_{23}\varepsilon),\ S=hb_{66}\varepsilon_{\alpha\beta},$ (16)

$M_1=\frac{h^3}{12}(b_{11}æ_\alpha+b_{12}æ_\beta+b_{13}\chi)\ \ M_2=\frac{h^3}{12}(b_{12}æ_\alpha+b_{22}æ_\beta+b_{23}\chi),\ G=\frac{h^3}{12}b_{66}æ_{\alpha\beta}.$

Формули (15) задають компоненти тензора $\mathbf{T}^{(1)}$ − тензора вхідних (неврівноважених) напружень, що не підпорядковані рівнянням рівноваги (5). Відповідні компоненти тензора вихідних (врівноважених) напружень знайдемо як розв'язок рівнянь (5) при $\sigma_\alpha=\sigma_\alpha^{(1)},\ \sigma_\beta=\sigma_\beta^{(1)},\ \tau_{\alpha\beta}=\tau_{\alpha\beta}^{(1)}$ (згідно з виразами за формулами (15)). Не відхиляючись від загальності в процедурі розв'язування рівнянь (5), надалі обмежимося лише важливим для практики випадком, коли всі компоненти вектора об'ємних сил є лінійними функціями змінної *z*. Враховуючи диференціальні залежності (6), граничні умови (3) і співвідношення (7), шуканий розв'язок знайдемо у вигляді:

$$\sigma_\alpha=\sigma_\alpha^{(2)}=\frac{1}{h}T_1+z\frac{12}{h^3}M_1,\sigma_\beta=\sigma_\beta^{(2)}=\frac{1}{h}T_2+z\frac{12}{h^3}M_2,\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\alpha\beta}^{(2)}=\frac{1}{h}S+z\frac{12}{h^3}G,$$

$$\tau_{\alpha z}=\tau_{\alpha z}^{(2)}=X_1+\frac{z}{h}X_2+\frac{3}{2}\frac{h^2-4z^2}{h^3}(N_1-hX_1),$$

$$\tau_{\beta z}=\tau_{\beta z}^{(2)}=Y_1+\frac{z}{h}Y_2+\frac{3}{2}\frac{h^2-4z^2}{h^3}(N_2-hY_1), \quad (17)$$

$$\sigma_z=\sigma_z^{(2)}=Z_1+\frac{z}{h}Z_2+\frac{h^2-4z^2}{8h}\left(\frac{12}{h^2}\langle zK_3\rangle\, div\overrightarrow{g_2}\right)+$$

$$+\frac{z(h^2-4z^2)}{2h^3}(Z_2+\langle K_3\rangle\, div\overrightarrow{g_1}),$$

де зусилля T_1,T_2,S,N_1,N_2 та моменти M_1,M_2,G є розв'язками рівнянь (6).

Формули (17) задають компоненти тензора $\mathbf{T}^{(2)}$ вхідних (врівноважених) напружень, які задовольняють рівнянням рівноваги (5), але узгоджені лише частково (тільки через компоненти $\sigma_\alpha^{(2)},\sigma_\beta^{(2)},\tau_{\alpha\beta}^{(2)}$) із законом (10). За компонентами тензора $\mathbf{T}^{(2)}$ можна скласти вирази для вихідних деформацій $e_\alpha^{(2)},e_\beta^{(2)}$, $e_z^{(2)},e_{\alpha\beta}^{(2)},e_{\alpha z}^{(2)},e_{\beta z}^{(2)}$ та переміщень $u_\alpha^{(2)},u_\beta^{(2)},u_z^{(2)}$.

Оптимальні кінцеві співвідношення та основна система рівнянь. Враховуючи зв'язки між компонентами тензорів $\mathbf{T}^{(1)}$, $\mathbf{T}^{(2)}$ та співвідношення (4), знайдемо матимемо:

$$e_z^{(2)}=e_z^{(1)}+a_{33}(\sigma_z^{(2)}-\sigma_z^{(1)}),e_{\alpha z}^{(2)}=a_{55}\tau_{\alpha z}^{(2)},e_{\beta z}^{(2)}=a_{44}\tau_{\beta z}^{(2)}. \quad (18)$$

З третього, п'ятого та шостого співвідношень (4) на основі рівностей (18) матимемо:

$$\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z}=\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}+a_{33}\left(\sigma_z^{(2)}-\sigma_z^{(1)}\right),\frac{\partial u_\alpha^{(2)}}{\partial z}=a_{55}\tau_{\alpha z}^{(2)}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial\alpha}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial u_\beta^{(2)}}{\partial z} = a_{44}\tau_{\beta z}^{(2)} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial \beta}$$

Звідси інтегруванням по змінній z отримаємо:

$$u_z^{(2)} = u_{z0}^{(2)} + u_z^{(1)} - w + a_{33}\int_0^z (\sigma_z^{(2)} - \sigma_z^{(1)})\,dz,$$

$$u_\alpha^{(2)} = u_{\alpha 0}^{(2)} + a_{55}\int_0^z \tau_{\alpha z}^{(2)}dz - \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_0^z u_z^{(2)}dz, \qquad (20)$$

$$u_\beta^{(2)} = u_{\beta 0}^{(2)} + a_{44}\int_0^z \tau_{\beta z}^{(2)}dz - \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\int_0^z u_z^{(2)}dz,$$

де $u_{z0}^{(2)}, u_{\alpha 0}^{(2)}, u_{\beta 0}^{(2)}$ – додаткові параметри, що визначають деформований стан пластини і мають зміст вихідних переміщень у серединній площині. У загальному випадку через можливі неспівпадіння значень тензорів напружень та переміщень ($\mathbf{T}^{(1)}, u_z^{(1)}, u_\alpha^{(1)}, u_\beta^{(1)}$ з одного боку та $\mathbf{T}^{(2)}$, $u_z^{(1)}, u_\alpha^{(1)}, u_\beta^{(1)}$ з другого) матимемо дві групи нев'язок. Нев'язки по напруженнях позначимо через Δ_1, Δ_2 та Δ_3, нев'язки по переміщеннях – через Δ_4, Δ_5 та Δ_6. Покладемо:

$$1)\quad \Delta_1 = \left|\sigma_z^{(2)} - \sigma_z^{(1)}\right|,\ \Delta_2 = \left|\tau_{\alpha z}^{(2)} - \tau_{\alpha z}^{(1)}\right|,\ \Delta_3 = \left|\tau_{\beta z}^{(2)} - \tau_{\beta z}^{(1)}\right|, \qquad (21)$$

$$2)\quad \Delta_4 = \left|u_z^{(2)} - u_z^{(1)}\right|,\ \Delta_5 = \left|u_\alpha^{(2)} - u_\alpha^{(1)}\right|,\ \Delta_6 = \left|u_\beta^{(2)} - u_\beta^{(1)}\right|. \qquad (22)$$

Нев'язки розглядатимемо як прояв відхилень між точним та наближеним розв'язками. Тому їх будемо пом'якшувати (мінімізувати). Пом'якшення нев'язок (окремо по групах (21) та (22)) реалізуватимемо за методом середнього квадратичного – оптимальним підбором параметрів $\varepsilon, \chi, \varphi, \psi$ та $u_{z0}^{(2)}, u_{\alpha 0}^{(2)}, u_{\beta 0}^{(2)}$ для мінімізації функціоналів I_k:

$$I_k = \int_{-0,5h}^{0,5h} \Delta_k^2 dz \quad (i = \overline{1;6}). \qquad (23)$$

Вирази функціоналів складемо за формулами (13),(17)-(23). Кожній групі нев'язок, (21) чи (22), відповідає своя група оптимальних кінцевих співвідношень, які встановлюють лінійну залежність параметрів ε, χ від тангенціальних зусиль-моментів та параметрів φ, ψ від перерізаючи зусиль. Мінімізуючи функціонали I_1, I_2, I_3, знайдемо:

$$\varepsilon = \frac{1}{b_{33}}(-b_{13}\varepsilon_\alpha - b_{23}\varepsilon_\beta + f_1^{(n)}),\ f_1^{(n)} = Z_1 + \frac{1}{h}\langle zK_3\rangle + \frac{h}{12}div\,\vec{g}_2,$$

$$\chi = \frac{1}{b_{33}}(-b_{13}æ_\alpha - b_{23}æ_\beta + \frac{1}{h}f_2^{(n)}),\ f_2^{(n)} = \frac{6}{5}Z_2 + \frac{1}{5}(\langle K_3\rangle + h\,div\,\vec{g}_1), \qquad (24)$$

$$N_1 = \frac{h}{a_{55}}\left[\varphi + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(w + \frac{h^2}{24}\chi\right)\right],\ N_2 = \frac{h}{a_{44}}\left[\psi + \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(w + \frac{h^2}{24}\chi\right)\right].$$

Мінімізуючи функціонали I_4, I_5, I_6, матимемо:

$$\varepsilon = \frac{1}{b_{33}}(-b_{13}\varepsilon_\alpha - b_{23}\varepsilon_\beta + f_1^{(n)}),\ f_1^{(n)} = Z_1 + \frac{6}{5h}\langle zK_3\rangle + \frac{h}{10}div\,\vec{g}_2,$$

$$\chi=\frac{1}{b_{33}}(-b_{13}\text{æ}_\alpha-b_{23}\text{æ}_\beta+\frac{1}{h}f_2^{(n)}),\ \ f_2^{(n)}=\frac{9}{7}Z_2+\frac{2}{7}(\langle K_3\rangle+h\,div\,\vec{g}_1),$$

$$N_1=\frac{5}{6}\frac{h}{a_{55}}\left[\varphi+\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(w+\frac{h^2}{40}\chi\right)\right]+\frac{1}{6}X_1,$$

$$N_2=\frac{5}{6}\frac{h}{a_{44}}\left[\psi+\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(w+\frac{h^2}{40}\chi\right)\right]+\frac{1}{6}Y_1, \tag{25}$$

$$u_{z0}^{(2)}=w-\frac{3h}{1120}a_{33}(Z_2+\langle K_3\rangle+h\,div\,\vec{g}_1),$$

$$u_{\alpha0}^{(2)}=u+\frac{h^2}{24}\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}-\frac{h}{24}a_{55}X_2+\frac{h^2}{1920}a_{33}\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{12}{h}\langle zK_3\rangle+h\,div\,\vec{g}_2\right),$$

$$u_{\beta0}^{(2)}=u+\frac{h^2}{24}\frac{1}{H_2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta}-\frac{h}{24}a_{44}Y_2+\frac{h^2}{1920}a_{33}\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{12}{h}\langle zK_3\rangle+h\,div\,\vec{g}_2\right).$$

Кінцеві співвідношення (24) (що мінімізують нев’язки по напруженнях) слід застосовувати при знаходженні напруженого стану, зусиль та моментів, а співвідношення (25) − при знаходженні переміщень пластини. Підставивши значення $\varepsilon,\chi,\varphi,\psi$ зі співвідношень (24), (25) у формули (12), отримаємо оптимізовані вхідні переміщення $u_z^{(1)},u_\alpha^{(1)},u_\beta^{(1)}$. Підставивши значення $\varepsilon,\chi,\varphi,\psi$ та $u_{z0}^{(2)},u_{\alpha0}^{(2)},u_{\beta0}^{(2)}$ зі співвідношень (25) у формули (20), отримаємо оптимізовані вихідні переміщення $u_z^{(2)},u_\alpha^{(2)},u_\beta^{(2)}$.

Формули (16) та (24) дають повну систему співвідношень для визначення зусиль, моментів і параметрів ε,χ через тангенціальні деформації $\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, зміни кривин æ_α, æ_β, $\text{æ}_{\alpha\beta}$ та переміщення w. Підставивши вирази зусиль і моментів в рівняння (6) і замінивши параметри $\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\alpha,\varepsilon_{\alpha\beta}$, æ_α, æ_β, $\text{æ}_{\alpha\beta}$ їх виразами за формулами (14), отримаємо замкнену систему п’яти диференціальних рівнянь з п’ятьма невідомими u,v,w та φ,ψ. Розв'язки цієї системи повинні задовольняти граничним умовам (3) та умовам на торцевих поверхнях $\alpha=const,\beta=const$.

III. Задача про осесиметричний згин круглої пластини

Розглянемо круглу пластину радіуса ***a*** і товщини ***h*** під дією поперечного навантаження сталої інтенсивності ***q***.Віднесемо її до циліндричної системи координат (r,ϑ,z) з початком у геометричному центрі O пластини і віссю Oz по нормалі до серединної площини. Нехай ця пластина є однорідною трансверсально ізотропною, у кожній точці площина ізотропії проходить паралельно площині $z=0$. Пружна рівновага такої пластини описується формулами (1)-(25), якщо в них покласти:

$$\alpha=r,\beta=\vartheta,\ H_1=1,H_2=r;$$

$$a_{11}=a_{22}=\frac{1}{E},a_{33}=\frac{1}{E'},a_{12}=-\frac{\nu}{E},a_{13}=a_{23}=-\frac{\nu'}{E'}. \tag{26}$$

Відповідно до умов навантаження об’ємні сили відсутні:

$$K_i=\langle K_i\rangle=0\ \ (i=\overline{1;3});\ \langle zK_1\rangle=\langle zK_2\rangle=0, \tag{27}$$

умови на граничних площинах $z=\pm0{,}5h$ задаються рівностями:

$$X_1^-=Y_1^-=Z_1^-=X_1^-=X_1^+=Y_1^+=Z_1^+=X_1=Y_1=0,Z_1^+=q,Z_1=\frac{q}{2},Z_2=q. \tag{28}$$

На поверхні $r=0$ приймемо умови шарнірного опертя:

$$T_1=0,\ M_1=0,\ w=0. \tag{29}$$

З умов осесиметричного деформування випливає, що $v=0$ та $\psi=0$, а всі характеристики деформованого і напруженого стану пластини не залежать від координати ϑ. В цьому випадку за співвідношеннями (2),(4),(10),(14) та (16) отримаємо:

$$e_{\theta z}=0,\ \varepsilon_{r\theta}=0,\ æ_{r\theta}=0,\ \varepsilon_r=\frac{du}{dr},\varepsilon_\theta=\frac{u}{r},\ æ_r=\frac{d\varphi}{dr}\ ,\ æ_\theta=\frac{\varphi}{r},$$
$$N_2=S=0,\ H=0 \tag{30}$$

Виходячи з навантажень (27) та (28), кінцеві співвідношення (24),(25) набувають вигляду:

$$\varepsilon=-\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)+\frac{1}{E'}\left(1-2\frac{(\nu')^2}{1-\nu}\frac{E}{E'}\right)\frac{q}{2},$$
$$\chi=-\frac{\nu'}{1-\nu}(æ_r+æ_\theta)+k_{21}\frac{1}{E'}\left(1-2\frac{(\nu')^2}{1-\nu}\frac{E}{E'}\right)\frac{q}{h}, \tag{31}$$
$$\varphi=-\frac{dw}{dr}+k_{31}\frac{N_1}{hG'}-k_{32}h^2\frac{d\chi}{dr},$$

де k_{21}, k_{31} та k_{32} – сталі, які залежно від призначення приймають одне з двох значень. При знаходженні напруженого стану, зусиль і моментів пластини у формулах (31) слід покласти:

$$k_{21}=\frac{6}{5},\ k_{31}=1,\ k_{32}=\frac{1}{24}; \tag{32}$$

при знаходженні переміщень покласти:

$$k_{21}=\frac{9}{7},\ k_{31}=\frac{6}{5}\ \ k_{32}=\frac{1}{40}. \tag{33}$$

Рівняння (6) при навантаженнях (27),(28) зводяться до системи:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dr}(rT_1)-T_2=0,\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(rN_1)=-q,\\ \dfrac{d}{dr}(rM_1)-M_2=rN_1.\end{cases} \tag{34}$$

За формулами (8),(10),(16), (26), (30) та (31) для зусиль T_1,T_2 і моментів M_1,M_2 отримаємо:

$$T_1=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}\right)+\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{qh}{2},\ M_1=D\left(\frac{d\varphi}{dr}+\nu\frac{\varphi}{r}\right)+k_{21}\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{qh^2}{12}, \tag{35}$$
$$T_2=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}\right)+\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{qh}{2},\ M_2=D\left(\nu\frac{d\varphi}{dr}+\frac{\varphi}{r}\right)+k_{21}\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{qh^2}{12}.$$

Тут $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – жорсткість на згин. Інтегруючи друге рівняння системи (34) (за умови, що при $r=0$ зусилля N_1 є скінченним), знайдемо:

$$N_1=-0{,}5qr. \tag{36}$$

Підставивши вирази (35),(36) у перше та третє рівняння системи (34), матимемо:

$$\left(r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}-1\right)u=0\Rightarrow u=\frac{C_1}{2}r+\frac{C_2}{r}, \tag{37}$$

$$\left(r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}-1\right)\varphi=-\frac{6(1-\nu^2)}{Eh^3}qr^3\Rightarrow\varphi=-\frac{q}{2D}\left(\frac{r^3}{8}+\frac{C_3}{2}r+\frac{C_4}{r}\right).\qquad(38)$$

Оскільки при $r=0$ величини u та φ є скінченними, то покладемо $C_2 = C_4 =$ $= 0$. За формулами (35),(37),(38) складемо вирази для зусиль і моментів. Сталі C_1 і C_3 визначимо з першої і другої граничних умов (29). Враховуючи значення сталих, отримаємо:

$$u=-\frac{qr}{2}\frac{\nu'}{E'},\quad \varphi=-\frac{qr}{16D}\left[\frac{(1+\nu)r^2-(3+\nu)a^2}{1+\nu}+\frac{4h^2}{3}\frac{\nu'}{1-\nu^2}\frac{E}{E'}k_{21}\right].\qquad(39)$$

$$T_1=T_2=0,\ M_1=\frac{q}{16}(3+\nu)(a^2-r^2), M_2=\frac{q}{16}\left[(3+\nu)a^2-(1+3\nu)r^2\right].\quad(40)$$

З допомогою формул (30),(31),(39) знайдемо параметри ε і χ:

$$\varepsilon=\frac{q}{2E'},\ \chi=\frac{q}{E'h}\left[k_{21}+\frac{3}{2}\nu'\frac{2(1+\nu)r^2-(3+\nu)a^2}{h^2}\right].\qquad(41)$$

Для знаходження переміщення w за третьою з формул (31) отримаємо:

$$\frac{dw}{dr}=-\varphi+k_{31}\frac{N_1}{hG'}-k_{32}h^2\frac{d\chi}{dr}.$$

Звідси, підставивши вирази N_1,φ,χ за формулами (36),(39),(41), після інтегрування по змінній r і задоволення третьої з граничних умов (29), знайдемо:

$$w=\frac{q}{64D}(a^2-r^2)\left[a^2\frac{5+\nu}{1+\nu}-r^2+\frac{8h^2}{1-\nu^2}\frac{E}{3E'}\left(\frac{E'k_{31}}{2G'}+6\nu'(1+\nu)k_{32}-\nu'k_{21}\right)\right].\ (42)$$

Вхідне переміщення $u_z^{(1)}$ складемо за формулою (12), де параметри w,ε,χ даються формулами (41),(42). Матимемо:

$$u_z^{(1)}=\frac{q}{64D}(a^2-r^2)\left[a^2\frac{5+\nu}{1+\nu}-r^2+\frac{8h^2}{1-\nu^2}\frac{E}{3E'}\left(\frac{E'k_{31}}{2G'}+6\nu'(1+\nu)k_{32}-\nu'k_{21}\right)\right]+\ +\frac{qz}{2E'}+$$

$$\frac{qz^2}{2E'h}\left[k_{21}+\frac{3}{2}\nu'\frac{2(1+\nu)r^2-(3+\nu)a^2}{h^2}\right].\qquad(43)$$

Для знаходження вихідного переміщення $u_z^{(2)}$ за формулами (15), (17) та співвідношеннями (25), (26) згідно з умовами (27), (28) дістанемо:

$$\sigma_z^{(1)}=q\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}k_{21}\right),\sigma_z^{(2)}=q\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{z}{h}-2\frac{z^3}{h^3}\right),u_{z0}^{(2)}-w=-\frac{3h}{1120}\frac{q}{E'}.\qquad(44)$$

Підставивши вирази (44) у формулу (20), отримаємо:

$$u_z^{(2)}=u_z^{(1)}-\frac{qh}{2E'}\left(\frac{3}{560}+\frac{2k_{21}-3}{2}\frac{z^2}{h^2}+\frac{z^4}{h^4}\right),\qquad(45)$$

де значення $u_z^{(1)}$ розкривається за формулою (43). Порівняємо отримані нами результати з відомими розв’язками цієї задачі, знайденими у роботах [2],[4]. У роботі [2] за наближеною теорією, яка спирається на гіпотези про нестисливість елемента нормалі до серединної площини і спеціальні закони зміни напружень на площадках, паралельних до неї, для пластини з трансверсально ізотропного матеріалу ([2], с. 152-154) було знайдено:

$$u_z = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)\left[a^2 \frac{5+\nu}{1+\nu} - r^2 + \frac{8}{5}\frac{h^2}{1-\nu^2}\frac{E}{E'}\left(\frac{E'}{G'} - 2\nu'\right)\right]. \quad (46)$$

За нашим методом переміщення u_z можна отримати, якщо у формулі (45) відповідно до рівностей (33) покласти $k_{21} = \frac{9}{7}$, $k_{31} = \frac{6}{5}$, $k_{32} = \frac{1}{40}$; матимемо:

$$u_z = u_z^{(2)} = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)\left[a^2 \frac{5+\nu}{1+\nu} - r^2 + \frac{8}{5}\frac{h^2}{1-\nu^2}\frac{E}{E'}\left(\frac{E'}{G'} - \nu'\frac{7-\nu}{4}\right)\right] + \frac{qz}{2E'} +$$

$$+\frac{qh}{2E'}\frac{z^2}{h^2}\left[\frac{6}{5} + \frac{3}{2}\nu'\frac{2(1+\nu)r^2 - (3+\nu a^2)}{h^2}\right] + \frac{qh}{2E'}\left(\frac{3}{10}\frac{z^2}{h^2} - \frac{z^4}{h^4} - \frac{3}{560}\right). \quad (47)$$

На відміну від розв'язку (46), за яким переміщення u_z вважається сталим, розв'язок (47) дозволяє дтакож досліджувати зміну цього переміщення по товщині пластини.

За формулами (46) і (47), поклавши $\nu' = \nu, E' = E$, можна отримати також розв'язки розглянутої задачі для пластини з ізотропного матеріалу. У цьому випадку їх можна буде порівняти з відомим ([4], с. 504-507) точним розв'язком:

$$u_z = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)\left[a^2 \frac{5+\nu}{1+\nu} - r^2 + \frac{2}{5}\frac{h^2}{1-\nu^2}(8+\nu+\nu^2)\right] + \frac{qz}{2E} +$$

$$+\frac{qh}{2E}\frac{z^2}{h^2}\left[\frac{6}{5} + \frac{3}{2}\nu\frac{2(1+\nu)r^2 - (3+\nu a^2)}{h^2}\right] + \frac{qh}{2E}(1+\nu)^2\left(\frac{3}{10}\frac{z^2}{h^2} - \frac{z^4}{h^4}\right). \quad (48)$$

Для пластини з ізотропного матеріалу за методом роботи [2], отримаємо:

$$u_z = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)\left[a^2 \frac{5+\nu}{1+\nu} - r^2 + \frac{16}{5}\frac{h^2}{1-\nu^2}\right]. \quad (49)$$

За методом пом'якшення, виходячи з формули (47), матимемо:

$$u_z = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)\left[a^2 \frac{5+\nu}{1+\nu} - r^2 + \frac{2}{5}\frac{h^2}{1-\nu^2}(8+\nu+\nu^2)\right] + \frac{qz}{2E}\left(z - \frac{3h}{560}\right) +$$

$$+\frac{qh}{2E}\frac{z^2}{h^2}\left[\frac{6}{5} + \frac{3}{2}\nu\frac{2(1+\nu)r^2 - (3+\nu a^2)}{h^2}\right] + \frac{qh}{2E}\left(\frac{3}{10}\frac{z^2}{h^2} - \frac{z^4}{h^4}\right). \quad (50)$$

Порівнюючи розв'язки (48), (49) та (50), переконуємось, що застосований нами безгіпотезний метод розрахунку пластин може бути достатньо конкурентним. Це підтверджується також при співставленні виразів для зусиль та моментів. Розв'язки за формулами (40) повністю співпадають з результатами розв'язування за точним методом згідно з роботою [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1967. – 266 с.
3. *Кильчевский Н. А.* Основы аналитической механики оболочек. – М.: Изд.-во АНУССР, 1963.
4. *Ляв А.* Математичсеская теория упругости. – М.: ОНТИ 1935.