

УДК 531.011

*Н. Л. Белевцова, к.т.н., доцент  
(професор кафедри «Теоретична та прикладна механіка» Державного економіко-технологічного університету транспорту)  
В. Г. Хребет, к. ф.-м. н., доцент  
(доцент кафедри «Базові та спеціальні дисципліни» навчально-наукового інституту неперервної освіти Національного авіаційного університету)*

### К ВОПРОСУ О ВОЗМОЖНОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ГОЛОНОМНОЙ И НЕГОЛОНОМНОЙ МОДЕЛЕЙ КОЛЕСНОГО ЭКИПАЖА ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ

*В статье анализируются возможности реализации круговых стационарных режимов для голономных и неголономных моделей двухосного экипажа при отсутствии продольных тяговых сил.*

*Ключевые слова:* двоосный экипаж, устойчивость движения, коэффициент увода, модель.

*У статті аналізуються можливості реалізації кругових стаціонарних режимів для голономних і неголономних моделей двохосьового екіпажу за відсутності позовдженіх тягових сил.*

*Ключові слова:* двохосьовий екіпаж, стійкість руху, коефіцієнт відведення, модель.

Вопросы устойчивости динамических систем с качением изложены в монографии Ю.И. Неймарка и Н.А. Фуфаева [1]. Дальнейшее развитие исследований систем с качением уже с учетом таких параметров модели, как наклон оси самоориентирующихся колес шасси самолета или передней ноги трицикла проведены Лобасом Л. Г. [2]. В работе В.Г. Вербицкого и соавторов [3] анализируются модели голономных систем с качением при учете нелинейностей сил увода. В [4] приведен пример (сани Чаплыгина) из динамики неголономных систем, иллюстрирующий чувствительность некоторых транспортных систем к направлению движения, что присуще и голономным транспортным системам.

Проанализируем возможности реализаций стационарных режимов колесных систем (круговых стационарных режимов) при отсутствии тяговых усилий. Модель двухосного автомобиля с упругими по аксиоматике И. Рокара колесами (абсолютно жесткое рулевое управление).

Положение системы (рис. 1) задается координатами  $x$ ,  $y$  центра масс, продольная и поперечная проекции скорости которого на оси Кенига  $V$  и  $u$ . Положение продольной оси определяется курсовым углом  $\Psi$ ,  $\omega = \dot{\Psi}$  – угловая скорость относительно вертикальной оси;  $m$  – масса;  $l = a + b$  – база автомобиля;  $I_{zc}$  – центральный момент инерции относительно вертикальной оси.

© Белевцова Н. Л., Хребет В. Г., 2017

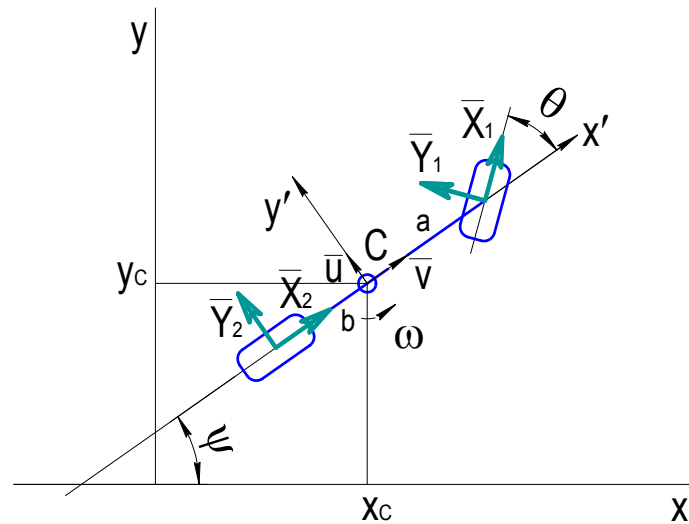


Рис. 1. Расчетная схема плоской модели автомобиля

Уравнения движения в подвижной системе координат (жестко связанной с телом) с началом в центре масс системы запишем в виде:

$$\begin{cases} m(\dot{u} + v\omega) = Y_1 \cos u + Y_2 + X_1 \sin u, \\ m(\dot{v} - u\omega) = Y_1 \sin u + Y_2 + X_1 \cos u, \\ I_{z_c} \dot{\omega} = aY_1 \sin u - bY_2 + aX_1 \cos u. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь, последнее уравнение системы (1) представляет теорему об изменении кинетического момента относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс  $C$  ( $I_{z_c} \dot{\omega} = \sum M_z$ ).

Рассмотрим случай движения по инерции (без тяговых сил)  $X_1 = X_2 = 0$ . Соответствующая система конечных уравнений, определяющая параметры круговых режимов движения  $(u^*, \omega^*)$  при фиксированных значениях управляемых параметров  $V = const; \theta = const$  имеет вид:

$$\begin{cases} -\omega u m = -Y_1 \theta, \\ \omega V m = Y_1 + Y_2, \\ 0 = aY_1 - bY_2. \end{cases} \quad (2)$$

Из двух последних уравнений системы (2) найдем силы увода на передней и задней осях  $Y_1 = \frac{b\omega^* V m}{l}, Y_2 = \frac{a\omega^* V m}{l}$ . Так как, согласно [5],  $Y_i = k_i \delta$ , то пара значений  $(u^*, \omega^*)$  определяется системой двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} b\omega Vm = k_1 l \cdot \left( \theta - \frac{u + a\omega}{V} \right), \\ a\omega Vm = k_2 l \cdot \left( \frac{-u + b\omega}{V} \right). \end{cases} \quad (3)$$

Решение системы (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{k_1 \theta v (-blk_2 + amv^2)}{k_1 blk_2 - k_1 lak_2 + bmv^2 k_2}, \\ \omega &= \frac{k_1 l \theta v k_2}{k_1 blk_2 - k_1 lamv^2 + k_1 lak_2 + bmv^2 k_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки  $Y_1 = \frac{b\omega^* V m}{l}$  в первое уравнение (4) получим решение:

$$\omega m \left( u - \frac{\theta b V}{l} \right) = 0; \Rightarrow u^* = \frac{\theta b V}{l}. \quad (5)$$

Решение (5) несовместно с ранее полученным (для совместности системы необходимо наличие ненулевой продольной силы).

Модель с абсолютно жесткими колесами (неголономная). Рассмотрим вопрос о возможности реализации кругового режима движения неголономной модели автомобиля при отсутствии продольных сил в пятне контакта колес (случай движения по инерции  $X_1 = X_2 = 0$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ )

$$\begin{aligned} m(\dot{V} - \omega u) &= -Y_1 \theta; \\ m(\dot{u} + \omega V) &= Y_1 + Y_2; \\ I_{zc} \dot{\omega} &= aY_1 - bY_2. \end{aligned}$$

Поперечная составляющая скорости центра оси равна нулю, следовательно, имеем два соотношения  $\theta V - u - a\omega = 0$ ,  $u - b\omega = 0$ , которые полностью определяют стационарный режим движения неголономной модели

$$\omega = \frac{\theta V}{l}; u = \frac{b \theta V}{l}$$

В случае реализации кругового режима ( $V = const; \theta = const; u = const; \omega = const$ ) уравнения движения неголономной модели автомобиля примут вид:

$$\begin{aligned} -\omega u m &= -Y_1 \theta; \\ \omega V m &= Y_1 + Y_2; \\ 0 &= aY_1 - bY_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Из второго и третьего уравнений последней системы (6) найдем реакции связей:

$$Y_1 = \frac{b\omega V m}{l}; Y_2 = \frac{a\omega V m}{l}.$$

Подставив найденное для реакции  $Y_1$  значение в первое уравнение (6), получим:

$$\omega u m = \frac{\theta b \omega V m}{l} \Rightarrow \omega m \left( u - \frac{\theta b V}{l} \right) = 0;$$

Последнее соотношение и указывает на возможность реализации кругового стационарного режима  $\left( V = const; \theta = const; u = \frac{b\theta V}{l}; \omega = \frac{\theta V}{l} \right)$  при движении по инерции.

Далее получим уравнение, описывающее неустановившееся движение неголономной модели авто при отсутствии тяговых усилий. Исключая из первоначальной системы (1)

$$\begin{aligned} m(\dot{V} - \omega u) &= -Y_1 \theta; \\ m(\dot{u} + \omega V) &= Y_1 + Y_2; \\ I_{z_c} \dot{\omega} &= aY_1 - bY_2; \end{aligned}$$

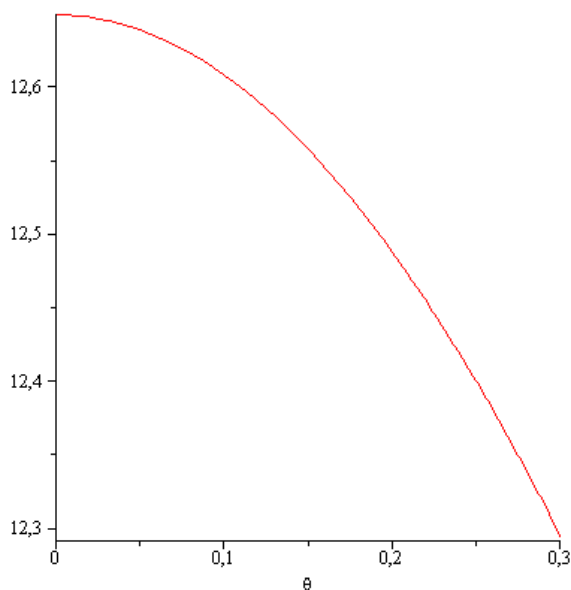
реакции связей, и учитывая соотношения неголономных связей, получим одно уравнение относительно  $V, \theta$ :

$$\begin{aligned} \theta V (I_{z_c} + mb^2) \frac{d\theta}{dt} + \left( (I_{z_c} + mb^2) \theta^2 + ml^2 \right) \frac{dV}{dt} &= 0, \\ \frac{\theta d\theta}{(I_{z_c} + mb^2) \theta^2 + ml^2} &= - \frac{dV}{V (I_{z_c} + mb^2)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Проинтегрировав последнее уравнение (7), получим текущее значение продольной составляющей скорости центра масс автомобиля как функцию угла поворота управляемых колес:

$$V = \frac{C}{\sqrt{(I_{z_c} + mb^2) \theta^2 + ml^2}}.$$

При увеличении угла поворота продольная составляющая центра масс  $V$  неголономной модели автомобиля уменьшается (рис. 2).



**Рис. 2. Графік залежності продольної складової швидкості центра мас неголономної моделі автомобіля при зміні кута повороту управляємих колес ( $C = 1600$ ,  $I_{z_c} = 6400$  кг·м<sup>2</sup>,  $m = 1000$  кг,  $b=2$  м,  $l=4$  м)**

Таким образом, при малых скоростях движения обе модели – с абсолютно жесткими колесами и упругими в кинематической постановке близки. Однако существенно расходятся в возможности реализации движения по инерции (при отсутствии тяговых сил): в неголономных моделях такие движения возможны, что согласуется с законом сохранения кинетической энергии и невозможны для случая голономной модели (соответствующий закон сохранения энергии не выполняется).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю. И.* Динамика неголономных систем / Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев. – М.: Изд-во «Наука», 1967. – 520 с.
2. *Лобас Л. Г.* Неголономные модели колесных экипажей / Л.Г. Лобас. – Киев: Наук. думка, 1986. – 232 с.
3. *Автомобили. Устойчивость: Монография* / В.Г. Вербицкий, В.П. Сахно, А. П. Кравченко, А.В. Костенко, А.Э. Даниленко. – Луганск: Изд-во «Ноулидж», 2013. – 176 с.
4. *Хребет В. Г.* К чувствительности транспортных систем / В. Г. Хребет, В. С. Сырых // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Управління високошвидкісними рухомими об'єктами та професійна підготовка операторів складних систем», 15 – 16 листопада 2012 року, Кіровоград. – Вид-во КЛА НАУ, 2012. – С. 310 – 312.
5. *Рокар И.* Неустойчивость в механике / И. Рокар – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. – 288 с.

*Natalia L. Belevtsova, PhD (Technical Sciences), Associate Professor  
(Professor of Theoretical and Applied Mechanics Chair, State University for  
Transport Economy and Technologies)*

*Valeriy Khrebet, PhD (Physical and Math. Sciences), Associate Professor  
(Associate Professor of Fundamental and Special Disciplines Chair, Institute of  
continuing education. National Aviation University)*

**ON THE QUESTION OF THE POSSIBILITY OF STATIONARY REGIMES  
OF THE WHOLE AND NON-HEELED MODELS OF THE WHEEL CREW  
AT THE INERTIA MOVEMENT**

*This article analyzes the compatibility conditions of a system defining the set of stationary modes of model movement on the assumption that longitudinal forces (pulling and braking ones) are absent.*

*Keywords: two-axle vehicle, stability of motion, slipping coefficient, module.*

**REFERENCES**

1. Neymark Yu. I. Dinamika negolonomnyih sistem [Dynamics of nonholonomic systems], Yu. I. Neymark i N. A. Fufaev, Moscow, Pub. «Nauka», 1967, 520 p.
2. Lobas L.G. Negolonomnyie modeli kolesnyih ekipazhey [Non-holonomic models of wheeled carriages] Kiev: Nauk. dumka, 1986, 232 p.
3. Avtomobili. Ustoychivost [Cars. Sustainability], Monografiya / V.G. Verbitskiy, V.P. Sahno, A. P. Kravchenko, A.V. Kostenko, A.E. Danilenko, Lugansk, Pub. «Noulidzh», 2013, 176 p.
4. Hrebet V. G. K chuvstvitelnosti transportnyih sistem [To the sensitivity of transport systems] V. G. Hrebet, V. S. Syiryih // Materiali mlzhnarodnoyi naukovo-praktichnoyi konferentsiyi «Upravlinnya visokoshvidklnimi ruhomimi ob'ektami ta profeslyna pdgotovka operatoriv skladnih sistem», 15 – 16 listopada 2012 roku, Kirovograd, Pub. KLA NAU, 2012, pp. 310 – 312
5. Rokar I. Neustoychivost v mehanike [Instability in mechanics] I. Rokar , Moscow, Izd-vo inostrannoy literaturyi, 1959, 288 p.