УДК 621.451.8

РАТНІКОВ І.М., *головний науковий співробітник, доктор технічних наук, старший науковий співробітник*
ПЕТРОВ Р.М., *старший науковий співробітник ТОВ “НВО“АВІА”*
СТАХ М.Я., *ад’юнкт*

МЕТОДИКА ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМИЗАЦІЇ, ЩО ВИНИКАЄ ПРИ ВИКОРИСТАННІ ПРИНЦИПУ РАЦІОНАЛЬНОЇ ОРГАНІЗАЦІЇ

Розглянуто методику використання принципу раціональної організації для розв’язання задачі векторної оптимізації при лінійних критеріальних функціях

Ключові слова: векторна оптимізація, лінійне програмування, раціональна організація, критеріальні функції

На сучасному етапі розвитку теорії багатокритеріального синтезу задачі векторної оптимізації систем різноманітного значення традиційно розв’язуються з використанням схем компромісів (чверток часткових критеріїв) [1], що дозволяє звести векторну постановку задачі до скалярного рішення.

Аналіз, проведений в [2], показує, що всі схеми компромісів групуються навколо двох полюсів, відображаючи протилежні принципи оптимальності: рівності та економічності.

Використання принципу рівності призводить до рівномірного зменшення рівня критеріальних функцій $\varphi_i(\bar{x}), i = \overline{1,Й}$. Принцип рівномірності реалізується мінімаксною схемою

$$\bar{x}^* = \underset{\bar{x} \in X}{\operatorname{argmin}} \max \{\varphi_i(\bar{x})\}_i^I , \tag{1}$$

де $Й$ - кількість функцій, яка забезпечує визначення таких значень $\bar{x}^*$ вектору $\bar{x}$ аргументів, при яких мінімізується найбільша із критеріальних функцій $\varphi_i(\bar{x})$ шляхом її зведення до рівня останніх.

До недоліку схеми (1) слід віднести той факт, що при її використанні вирівнювання часткових критеріїв може пройти за рахунок збільшення загального сумарного рівня критеріїв.

Принцип економічності, в основу якого покладено мінімізація суми розглянутих критеріїв, позбавлений цього недоліку. Принцип економічності на практиці реалізують схемою інтегральної оптимальності

$$\bar{x}^* = \underset{\bar{x} \in X}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{I} \varphi_i(\bar{x}) . \tag{2}$$

Недоліком принципу економічності є можливість збільшення одного з критеріїв за рахунок іншого при збереженні мінімального значення суми критеріїв.

Об’єднання переваг та згладжування недоліків схем компромісів (1) та (2) досягаються на основі використання принципу раціональної організації [2], згідно з яким рішення задачі векторної оптимізації визначається з умови його одночасного задоволення обом полярним схемам компромісів (мінімаксній схемі (1) та схемі інтегральної оптимальності (2)). При практичному використанні такого підходу мінімаксна схема, яка відрізняється складністю обчислювальних алгоритмів, замінюється схемою рівності критеріїв, а значення $\bar{x}^*$ у припущенні, що проблеми нормування та приорітетності критеріїв ураховано, визначається з рішення системи рівнянь [2]:

$$\begin{cases} \varphi_1(\bar{x}) = \varphi_2(\bar{x}) = ... = \varphi_i(\bar{x}) = ... = \varphi_I(\bar{x}), \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}}[\sum\limits_{i=1}^{I} \varphi_i(\bar{x})] = 0. \end{cases} \quad (3)$$

На практиці часто (наприклад, при вирішенні широко розпізнаної задачі оптимізації витрат на побудову систем різноманітного значення) мають місце випадки, коли критеріальні функції лінійно залежать від своїх аргументів:

$$\varphi_i(\bar{x}) = C_{i1}x_1 + C_{i2}x_2 + ... + C_{ij}x_j + ... + C_{iJ}x_J \text{ .,} \quad (4)$$

де $C_{i1}, C_{i2}, C_{ij} ... C_{iJ}$ - постійні коефіцієнти, які характеризують критеріальні функції.

У цьому разі традиційний шлях пошуку мінімального значення суми критеріальних функцій $\varphi_i(\bar{x})$ та, відповідно, вирішення системи рівнянь (3) викликає значні труднощі.

Метою статті є розробка методики рішення задачі векторної оптимізації, що виникає при використанні принципу раціональної організації для лінійних критеріальних функцій.

В основі пропонованого підходу до реалізації принципу раціональної організації для лінійних критеріальних функцій лежить зведення задачі векторної оптимізації до основної задачі лінійного програмування (ОЗЛП) [3]. При цьому в системі рівнянь (3) схема компромісів, яка відображає принцип рівності, використовується для формування обмежень в ОЗЛП, а схема інтегральної оптимальності трактується в числі цільової функції, що потребує мінімізації. Потрібне рішення ОЗЛП може бути сформульоване наступним чином [3].

Нехай для вектора змінних $\bar{x} = x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_J$ сформульована система обмежень у вигляді рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1J}x_J = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2J}x_J = b_2, \\ . \; , \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kj}x_j + ... + a_{kJ}x_J = b_k. \end{cases} \tag{5}$$

Потрібно визначити такі невід'ємні значення $\bar{x}^*$ вектора змінних, при яких стає досяжним мінімум лінійної функції

$$L(\bar{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_jx_j + ... + C_Jx_J. \tag{6}$$

Система обмежень (5) формулюється в кожному конкретному випадку, виходячи із умов вирішуваної задачі векторної оптимізації. Для наглядності розглянемо приклад, коли $k = 3$, $J = 5$, що допускає просту геометричну інтерпретацію на площині.

Відомо, що k лінійно незалежних рівнянь виду (5) у випадку $J > k$ можуть бути розв'язані відносно деяких базисних змінних шляхом вираження їх через залишені вільні змінні, число яких ($J - k$).

Приймемо за вільні змінні x_1 и x_2, тоді система рівнянь (5), яку можна розв'язати відносно базисних змінних x_3, x_4, x_5, може бути представлена у вигляді:

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3, \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4, \\ x_5 = \alpha_{51}x_1 + \alpha_{52}x_2 + \beta_5. \end{cases} \tag{7}$$

де $\beta_{3,}\ \beta_{4,}\ \beta_5$ - коефіцієнти, що приймають позитивні або негативні значення.

Зобразимо вільні змінні x_1 и x_2 на площині точкою з координатами (x_1, x_2). Множина позитивних рішень сформульованої ОЗЛП буде знаходитись в першому квадранті системи координат, утворюючою вільними змінними (рис. 1).

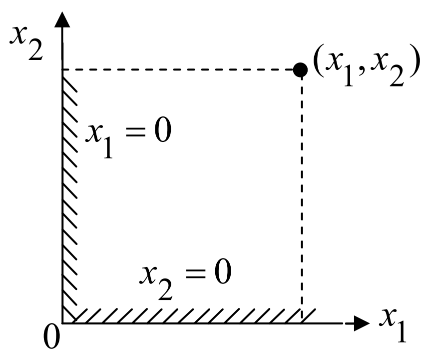

Рис. 1

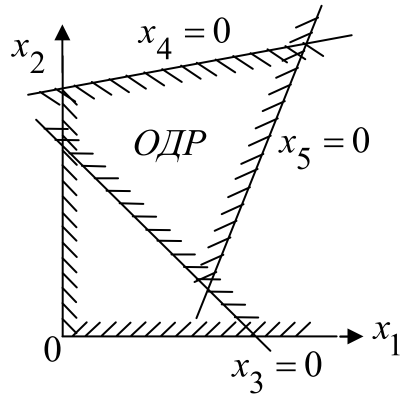

Рис. 2

Визначимо в розглянутій ОЗЛП область допустимих рішень (ОДР) із умови задоволення рівнянь (7) для базисних змінних. Прирівнюючи поступово x_3, x_4, x_5 до нуля, із (7) отримаємо прямі, розділяючи перший квадрант на півплощині, в якій базисні змінні приймають або позитивні, або негативні значення. Частина першого квадранта, який належить півплощинам, де базисні змінні одночасно являються позитивними, та визначають ОДР (рис. 2), утримуючим всю множину задовольняючих рішень рівняння (7).

Для виділення єдиного (оптимального) рішення виразимо цільову функцію через вільні змінні x_1 та x_2. Підставив вираз (7) у формулу (6), отримаємо

$$L(x_1, x_2) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_0, \qquad (8)$$

де ξ_1, ξ_2 – постійні коефіцієнти, а ξ_0 – вільний член, що характеризує цільову функцію через вільні змінні .

Оскільки мінімум лінійної неоднорідної функції (8) співпадає з мінімумом однорідної функції виду, для нашого прикладу $\tilde{L}(x_1, x_2) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$, побудуємо на площині вільних змінних пряму з рівнянням $\tilde{L}(x_1, x_2) = 0$ (рис. 3).

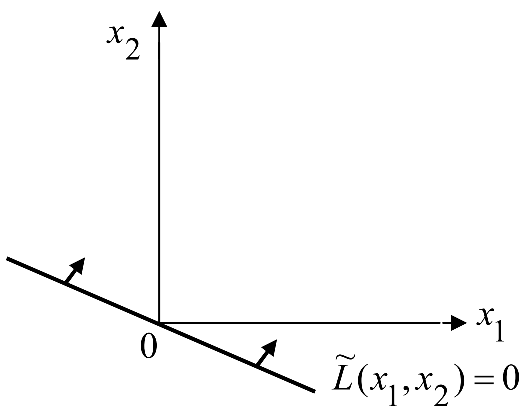

Рис. 3

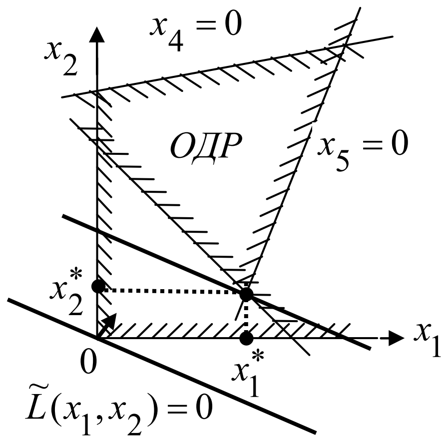

Рис. 4

Надаючи $\tilde{L}(x_1, x_2)$ різні довільні, але відмінні від нуля, значення $L_1, L_2, L_3, ...$, будемо переміщувати пряму паралельно саму собі до перетину з ОДР. Мінімальне значення цільової функції досягається в крайній точці ОДР (рис. 4). В цій точці вільні змінні приймають свої оптимальні значення x_1^*, x_2^*, по яким, у відповідності з (7), можуть бути визначені оптимальні значення останніх (базисних) змінних x_3^*, x_4^*, x_5^*.

Таким чином, поставлена ОЗЛП вирішена: визначені додатні значення $\bar{x}^*$ вектора змінних, при яких досягається мінімум лінійної цільової функції.

Знайдено рішення разом з тим є рішенням задачі векторної оптимізації, представленою системою рівнянь (3). Оскільки при $\bar{x} = \bar{x}^*$ одночасно обидві полярні схеми компромісів (мінімаксна схема та схема інтегральної оптимальності) одночасно задовольняють одна одну, то виконано умову, що полягає в основі принципу раціональної організації.

Викладена методика, напевне, зазнає принципових змін при збільшенні кількості вільних та базисних змінних, однак, при $(J\text{-}k) \geq 3$ замість наочних багатокутників, які описують ОДР, дослідженню підлягають “багатокутники” в $(J\text{-}k)$ – мірному просторі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Воронин А.Н. Многокритериальный синтез динамических систем. – К.: Наукова думка, 1992. – 158 с.
2. Воронин А.Н., Зиатдинов Ю.К., Харченко А.В., Осташевский В.В. Сложные технические и эргатические системы: методы исследования. - Харьков: Факт, 1997. – 240 с.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. – 208 с.

Надійшла до редакції 05.10.2013