УДК. 629.7.017.0031

ХАТУНЦЕВА З.В., *науковий співробітник*
МАРАКУЛІН О.Ю., *старший науковий співробітник*

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ МОДЕЛІ ФОРМУВАННЯ І ВИБОРУ ВАРІАНТІВ СИСТЕМ

У статті приводяться теоретичні основи методу обмежень при пошуку компромісних варіантів в задачах векторної оптимізації, що застосовують поняття відносної важливості критеріїв оптимальності

Ключові слова: критерій оптимальності, ефективні (Парето-оптимальні) рішення, схема компромісів, монотонні перетворюючі функції, відносна важливість критеріїв

Постановка задачі найкращого вибору (рішення) передбачає наявність правила, що дозволяє порівнювати якість можливих альтернатив за кількома скалярними функціями або критеріями оцінки (критеріями оптимальності, показниками якості, цільовими функціями). Традиційне поняття оптимальності при цьому замінюється на поняття «оптимальність по Парето», а сама задача вибору є багатокритеріальною. Основна особливість задачі багатокритеріальної (векторної) оптимізації полягає в тому, що її рішенням є, як правило, не єдина точка, а множина оптимальних по Парето або ефективних (π-оптимальних) точок.

Сукупність вихідних даних, необхідних для постановки задачі вибору, поділяється на такі групи [1]:

множина умов при застосуванні системи – E;

множина факторів, що характеризують стан системи – X;

множина критеріїв оптимальності системи – $К$;

певні обмеження на фактори $X – O_X$.

Якщо на фактори X накладаються певні обмеження O_X, система, що задовольняє сукупності вихідних даних, є допустимою. Допустима система, що задовольняє одночасно і обмеженням на критерії оптимальності, є суворо допустимою, а їх множина – суворо допустимою множиною.

Задача вибору оптимальної системи формулюється таким чином: з множини допустимих (суворо допустимих) варіантів системи A знайти таку систему $\alpha_0 \in A$, яка задовольняє сукупності вихідних даних ($E, X, К, O_X, O_К$) і має при цьому найкраще значення (в заздалегідь встановленому змісті) якості вектора К.

Найчастіше при багатокритеріальній оптимізації кількість допустимих варіантів системи важкодоступні для огляду. В цьому разі суттєве рішення задачі попереднього відсіву варіантів, звуження множини допустимих варіантів до множини ефективних або оптимальних по Парето. В термінах критеріїв оптимальності $К_i$ альтернатива α_0 є *ефективною*, якщо на множині допустимих альтернатив A не існує такої альтернативи α', для якої виконувалися б умови

$$\begin{aligned} &K_i(\alpha') \geq K_i(\alpha_0) \ \textit{при} \quad \textit{максимізації} \quad \textit{критерію оптимальності}, \\ &K_i(\alpha') \leq K_i(\alpha_0) \ \textit{при} \quad \textit{мінімізації} \quad \textit{критерію оптимальності} \end{aligned} \tag{1}$$

і принаймні одне з них суворе [1,2]. Інакше кажучи, ніяка інша альтернатива не може “покращити” значення деяких критеріїв оптимальності, не “погіршуючи” при цьому значень принаймні одного з решти критеріїв. Тобто оптимальним варіантом системи може бути одна з ефективних систем.

Проте при застосуванні методів, що вирішують задачу тільки до отримання ефективних варіантів з допустимої області, лишаються відкритими питання вибору схеми компромісу, зіставлення критеріїв (критерії мають різну фізичну природу, а також частина з них може мінімізуватися, а решта – максимізуватися), врахування пріоритету критеріїв.

Інформація про відносну важливість критеріїв («вагові» коефіцієнти критеріїв) – це основний тип додаткової інформації, з якою найчастіше доводиться мати справу при рішенні багатокритеріальних задач вибору. Формальні визначення цих коефіцієнтів в існуючих підходах до рішення відсутні. Звичайно вважається, що ці коефіцієнти повинні визначатися експертами. Проте не всі експерти можуть оцінити можливі наслідки свого визначення, розрахувати вплив кожного з оцінюваних коефіцієнтів на механізм вибору, що відповідає тому або іншому методу. Часто експерти не мають уявлення про той метод, в якому будуть використані призначені ними коефіцієнти. Таким чином, одні фахівці призначають коефіцієнти відносної важливості критеріїв, інші – застосовують той чи інший метод, а особа, що приймає рішення (ОПР), і несе відповідальність за прийняте рішення, є третьою стороною, яка може не розбиратися ні в коефіцієнтах (або не погоджуватися з висновками експертів), ні в методах прийняття рішення. В підсумку – низька якість прийнятого рішення зі всіма наслідками, що витікають. Отже, спочатку, перш ніж пропонувати будь-який метод прийняття рішення, що застосовує поняття відносної важливості критеріїв, необхідно домовитися про те, який саме сенс вкладати в це поняття. В даній статті викладення ґрунтується на формальному визначенні відносної важливості критеріїв на основі інформації ОПР, яка класифікується як допустима (експерт визначає її з малими протиріччями). Тобто в рамках єдиного методу, що пропонується, на основі переваг ОПР математично обґрунтовано розраховуються «вагові» коефіцієнти критеріїв оптимальності і також суворо обґрунтовується чисельна процедура пошуку компромісного варіанта системи. Основою для цього викладення слугує метод обмежень в задачах векторної оптимізації, застосування якого дозволяє вирішити проблему вибору компромісних варіантів складних технічних систем**.**

Теоретичні основи багатокритеріального вибору в задачах векторної оптимізації

Для конструктивного рішення поставленої задачі необхідно здійснити структуризацію деяких понять. Для цього слід зробити додаткові часткові припущення, що допомагають вирішити такі проблеми векторної оптимізації:

визначення області рішення, оптимальної по Парето (область Парето, область компромісів);

вибір схеми компромісів;

нормалізація критеріїв оптимальності;

врахування пріоритету критеріїв оптимальності;

вибір компромісного варіанта за сукупністю критеріїв оптимальності.

Область Парето. Рішення α^{κ} є оптимальним по Парето, якщо не знайдеться жодного іншого рішення α такого, для якого виконувалось би співвідношення $K_i(\alpha) \geq K_i(\alpha^{\kappa})$ (критерій оптимальності потрібно максимізувати) або $K_i(\alpha) \leq K_i(\alpha^{\kappa})$ (критерій потрібно мінімізувати), причому принаймні одне з нерівностей суворе.

Схема компромісів. Задача визначення області Парето є об'єктивною і має суворо наукове обґрунтування. Проте область Парето є множиною варіантів, з яких в більшості випадків необхідно вибрати тільки один, який і є шуканим багатокритеріальним рішенням. Але будь-яке звуження області ефективних рішень, а тим паче вибір одного з них, потребує залучення додаткової суб'єктивної інформації від ОПР або групи експертів, які приймають участь в рішенні багатокритеріальної задачі.

Нормалізація критеріїв оптимальності. Аналізувати і співставляти критерії оптимальності можна тоді, коли всі критерії мають однакову розмірність. В загальному випадку критерії оптимальності мають різну фізичну природу, а також частина з них може мінімізуватися, а друга – максимізуватися. Тому їх необхідно приводити до безрозмірного виду і єдиному способу екстремізації, наприклад мінімізації.

При нормалізації кожний критерій оптимальності піддається деякому монотонному перетворенню, що задовольняє такій основній вимозі: зберігати відношення переваги на множині варіантів, порівнюваних за множиною критеріїв оптимальності, і тим самим не змінювати множину ефективних рішень. Тому розглядається не множина критеріїв оптимальності *К*, а еквівалентна їй множина функцій $W = \{w_i(K_i(\alpha))\}(i \in I)$, де $w_i(K_i(\alpha))(i \in I)$ – монотонні перетворення, що зводять критерії оптимальності до безрозмірного виду і дозволяють порівнювати їх між собою.

В якості перетворення можна вибрати монотонні функції такого виду:

$$w_i(K_i(\alpha)) = \begin{cases} \dfrac{K_i^0 - K_i(\alpha)}{K_i^0 - K_{i(\min)}} & \text{при максимізації критерію оптимальності,} \\ \dfrac{K_i(\alpha) - K_i^0}{K_{i(\max)} - K_i^0} & \text{при мінімізації критерію оптимальності,} \end{cases} \qquad (2)$$

де $K_{i\ (min)}$, $K_{i\ (max)}$ – відповідно найменші значення критеріїв оптимальності, що максимізуються, і найбільші значення критеріїв оптимальності, що мінімізуються, на множині допустимих варіантів; K_i^0 – екстремальне значення *i* – того критерію; $0 \leq w_i(K_i(\alpha)) \leq 1$.

Пріоритет критеріїв оптимальності. На відміну від експертного методу цікавим є інший підхід визначення показників важливості критеріїв оптимальності ρ_γ. В даній методиці цей підхід є основним.

Доведена лема [1,3].

Лема. Для кожної допустимої альтернативи $\alpha \in A$, *такої, що* $0 < w_i(\alpha) < 1$ $\forall\, i \in I$, *в просторі W існують вектор* $\rho \in P^+$, *що задовольняє співвідношенням*

$$\rho = \{\rho_i\} = \{\rho_i : \rho_i > 0 \;\forall\, i \in I,\; \sum_{i \in I} \rho_i = 1\}, \tag{3}$$

і число $k_0 > 0$ *такі, що альтернатива* $\alpha \in A$ *задовольняє одночасно I рівнянням*

$$\rho_i\, w_i(\alpha) = k_0 . \tag{4}$$

Д о к а з. Так як $w_i(\alpha) \neq 0 \;\forall\, i \in I$, то поділивши обидві частини виразу (4) на $w_i(\alpha)$, отримаємо

$$\rho_i = \frac{k_0}{w_i(\alpha)} . \tag{5}$$

Так як ρ_i повинні задовольняти умовам (3), то підставляючи у співвідношення $\sum_{i \in I} \rho_i = 1$ вираз для ρ_i, отримаємо

$$k_0 = \frac{1}{\sum_{i \in I} 1 / w_i(\alpha)} = \frac{\prod_{i \in I} w_i(\alpha)}{\sum_{j \in I} \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} w_i(\alpha)}. \tag{6}$$

З урахуванням (6) вираз (5) приймає вигляд

$$\rho_i = \frac{\prod_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} w_j(\alpha)}{\sum_{q \in I} \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq q}} w_j(\alpha)}. \tag{7}$$

Вираз (6), що визначає параметр k_0, є монотонно-зростаючою функцією по кожній зі змінних $w_i(\alpha)$ на інтервалі (0,1), при цьому $k_0 \in (0, 1/M)$. Дійсно, із (4) при $w_i(\alpha) = 0$ слідує, що $k_0 = 0$. Для визначення максимального значення k_0 скористуємося співвідношенням (4), з якого слідує, що при $w_i(\alpha)_{max} = 1$ $k_0 = \frac{1}{\sum_{i \in I} 1} = 1/M$, де M – кількість елементів множини K. Величини зміни параметра k_0 будуть в подальшому застосовуватися при обґрунтуванні чисельної процедури пошуку компромісного варіанта складної технічної системи.

Напрям, що визначається вектором $\rho \in P^+$, задається для альтернатив, які знаходяться в позитивному ортанті в просторі W значень функцій W, і направляючі косинуси вектора ρ визначаться таким чином:

$$\cos\beta_i = \frac{\prod_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \rho_j}{\sqrt{\sum_{q \in I} \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq q}} \rho_j^2}}. \tag{8}$$

Метод обмежень в задачах векторної оптимізації.

Розглянемо спосіб визначення вагових коефіцієнтів ρ_i, заснований на завданні ОПР (експертами) допустимих значень критеріїв оптимальності. ОПР повідомляють діапазон змін $[K_{i(min)}, K_i^0]$ (якщо критерій максимізується) і $[K_i^0, K_{i(max)}]$ (якщо критерій мінімізується) для відповіді на питання: які допустимі відхилення від екстремальних значень по кожному критерію оптимальності необхідно задати для вибору прийнятного варіанта в розглядуваній ситуації. ОПР призначає множину допустимих значень $K^Д = \{K_i^Д\}$ $(i \in I)$ [4]. Застосовуючи для розрахунку ρ_i перетворення типу (2), отримаємо для кожного критерію оптимальності компоненти точки $w^Д = \{w_i^Д\}$ $(i \in I)$:

$$w_i^Д = \frac{K_i^0 - K_i^Д}{K_i^0 - K_{i(\min)}} \quad \text{при максимізації критерію оптимальності}$$
$$w_i^Д = \frac{K_i^Д - K_i^0}{K_{i(\max)} - K_i^0} \quad \text{при мінімізації критерію оптимальності} \quad . \quad (9)$$

В загальному випадку точка $w_i^Д$ повинна задовольняти співвідношенням (4), і вагові коефіцієнти ρ_i можуть бути знайдені із співвідношення (5) .

Викладений метод розрахунку вагових коефіцієнтів має істотну перевагу перед іншими вищезгаданими методами, так як він заснований на безпосередньому заданні ОПР бажаних значень критеріїв оптимальності, які близькі до їх екстремальних значень (експерт виконує цю операцію з малими протиріччями). Дослідження свідчать, що чим вужче діапазон зміни критерію оптимальності, тим жорсткіше вимоги до допустимих значень $K_i^Д$, а це означає, що він ближче до екстремального значення K_i^0. У свою чергу, зменшення величини відхилень від екстремальних значень по кожному критерію оптимальності призводить до збільшення ваги цього критерію, тобто тим більше ρ_i.

При цьому параметр k_0 (4) приймає найменше допустиме значення, тому що доведена наступна теорема.

Теорема. Якщо α^* *– ефективна альтернатива для заданого вектора* $\rho \in P^+$, *то їй відповідає найменше значення параметра* k_0 *,при якому система рівнянь (4) виконується одночасно для всіх* $i \in I$.

Якщо в якості перетворень $w_i(K_i(\alpha))$ $\forall i \in I$ $\forall \alpha \in A$ вибрати перетворення виду (2), то, з урахуванням теореми, під рішенням задачі векторної оптимізації для заданого вектора переваги $\rho \in P^+$ розуміється компромісний варіант $\alpha^* \in A$, який забезпечує однакові мінімальні *зважені відносні втрати* $\tilde{w}_i(\alpha^k) = \rho_i w_i(\alpha^k)$ за всіма критеріями оптимальності одночасно.

Вибір компромісного варіанта за сукупністю критеріїв оптимальності.

Для обґрунтування чисельної процедури пошуку компромісного варіанта доведена теорема [1].

Теорема. Для того щоб альтернатива $\alpha^* \in A$ *така, що* $w_i(\alpha^*) > 0$ $\forall i \in I$, *була ефективною при заданому векторі переваги* $\rho \in P^+$, *достатньо, щоб* α^* *була єдиним рішенням системи нерівностей*

$$\rho_i w_i(\alpha^*) \le k_0 \quad \forall i \in I \tag{10}$$

для мінімального значення параметра k_0, при якому ця система сумісна.*

В просторі W компромісній альтернативі відповідає точка перетину променя, направляючі косинуси якого визначаються заданим вектором переваги $\rho \in P^+$ за формулами (8), з областю ефективних варіантів. Існування точки перетину вказує на наявність компромісного рішення, для якого мінімально можливі зважені втрати за всіма критеріями оптимальності рівні ($\rho_i w_i(\alpha) = k_{0(min)}$ $\forall i \in I$). Якщо такої точки не існує, тобто промінь, що визначається вектором переваги ρ, не перетинає область ефективних варіантів, то компромісній альтернативі буде відповідати варіант, найближчий до заданого променя.

Для знаходження компромісного варіанта будується ітераційний процес з параметром $\kappa_0 \in (0,1/M)$, на кожному кроці якого перевіряється сумісність системи нерівностей (10) для всіх альтернатив і заданого вектора ρ. При $\kappa_0 \to 1/M$ нерівності задовольняють на всій множині альтернатив (ОПР працює з частиною області альтернатив, що визначається допустимими значеннями критеріїв оптимальності $K_i^{Д}$), а при $\kappa_0 \to 0$ відносні втрати прямують до нуля, тобто критерії оптимальності прямують до своїх екстремальних значень. Зменшення параметра $k_0(l)$ (l – номер кроку), а отже і зменшення зважених відносних втрат за всіма критеріями оптимальності наближає до варіанта, що забезпечує мінімальні втрати за всіма критеріями оптимальності, тобто до компромісного варіанта. Ітераційний процес зупиняється, коли найменше k_0, при якому система нерівностей (10) на множині допустимих варіантів ще сумісна, відрізняється від найближчого значення $k_0(l+1)$, при якому система вже не сумісна, не більше ніж на $\varepsilon \ge 0$. Величина ε задається за умови точності знаходження рішення. Якщо рішення системи нерівностей єдине, це і є шуканий компромісний варіант складної технічної системи.

Якщо в якості монотонних перетворень критеріїв оптимальності вибрати співвідношення (9), то задача знаходження єдиної компромісної альтернативи формулюється таким чином: знайти рішення задачі параметричного програмування відносно параметра k_0 при заданому векторі переваги ρ:

$$\min\left\{F(\alpha) = \sum_{i \in I_1} \rho_i \frac{K_i^0 - K_i(\alpha)}{K_i^0 - K_{i(\min)}} + \sum_{i \in I_2} \rho_i \frac{K_i(\alpha) - K_i^0}{K_{i(\max)} - K_i^0}\right\} \tag{11}$$

з урахуванням обмежень

$$\alpha \in A,$$

$$K_i(\alpha) \ge K_i^* = K_i^0 - \frac{k_0}{\rho_i}(K_i^0 - K_{i(\min)}) \quad \text{при максимізації критерію оптимальності}$$

$$K_i(\alpha) \le K_i^* = K_i^0 + \frac{k_0}{\rho_i}(K_{i(\max)} - K_i^0) \quad \text{при мінімізації критерію оптимальності} \quad . \tag{12}$$

Приведена методика застосовувалась при виконанні ряду науково-дослідних робіт в Державному науково-дослідному інституті авіації при виборі оптимальних варіантів зразків озброєння та військової техніки. Її застосування дало можливість ефективно вирішити задачі пошуку оптимального варіанта військово-транспортного літака (шифр «Шпак»), обґрунтувати раціональні шляхи переозброєння Збройних Сил України на нову авіаційну техніку, одним з результатів якого був вибір раціональних зразків літаків в ударному і винищувальному варіантах та інші.

ЛІТЕРАТУРА

1. Михалевич В.С., Волкович В.Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М.: Наука, 1982. – 280 с.
2. Экенроде Р.Т. Взвешенные многомерные критерии. // Статистическое измерение качественных характеристик. - М.:Статистика, 1972. - С. 139-153.
3. Волкович В.Л., Даргейко Л.Ф. Метод ограничений в задачах векторной оптимизации // Автоматика. - 1976, № 3. - С. 13-17.
4. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления. - К.: Наукова думка, 1984.-208 с.

Надійшла до редакції 20.10.2015