УДК 666.97.033.16

О.В. Орисенко, к.т.н., доц., Т.М. Нестеренко, магістрантка
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РОБОЧОГО ОРГАНА ВІБРАЦІЙНОЇ МАШИНИ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КІЛЕЦЬ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ БЕТОННОЇ СУМІШІ, ЩО УЩІЛЬНЮЄТЬСЯ

Наведено результати математичного моделювання руху робочого органу вібраційної машини для формування залізобетонних кілець з урахуванням впливу бетонної суміші, що ущільнюється.

Ключові слова: вібрування, формування, ущільнення, середовище, математична модель.

Приведены результаты математического моделирования движения рабочего органа вибрационной машины для формования железобетонных колец с учетом влияния уплотняемой смеси.

Ключевые слова: вибрирование, формование, уплотнение, среда, математическая модель.

The result of mathematic design of working organ motion of vibration machine for forming rings of the reinforced concretes taking into account influencing of concrete mixture which concentration.

Keywords: vibrating, formation, condensation, environment, mathematical model.

Постановка проблеми. При віброущільненні бетонної суміші робочий орган машини та середовище, яке ущільнюється, рухаються за своїми, властивими їм законами. При цьому енергія віброзбуджувача витрачається в самій машині, у зоні контакту із середовищем і в середовищі. Отже, при математичному моделюванні та практичних розрахунках віброущільнювальних машин виникає необхідність урахування впливу бетонної суміші на їх динаміку, оскільки на подолання сил опору в середовищі, котре ущільнюється, витрачається значна частка енергії машини. У зв’язку з цим ущільнювальну машину і бетонну суміш доцільно розглядати як єдину динамічну систему.

Аналіз досліджень і публікацій, у яких започатковано розв’язання даної проблеми. Дослідженню впливу бетонної суміші на рух робочого органа вібраційних машин приділено значну увагу в працях багатьох учених. При цьому наявність суміші у формі враховувалась різними способами.

Характеризуючи внутрішні втрати енергії в середовищі площею петлі гістерезису, В.Й. Сівко [1, 2] виділяє три способи врахування опору в динаміці віброущільнювальних машин.

1 Енергетичний метод, згідно з яким у матеріалі, котрий деформується, визначається величина відносного розсіювання енергії, як відношення площі петлі гістерезису до пружної енергії, що відповідає амплітуді вібропереміщення.

2 Метод членування складових опору, за яким окремо розглядають пружний, в’язкий та сухий (кулоновий) опори і враховують ці складові в загальному рівнянні руху системи. Цей спосіб, на відміну від попереднього, дозволяє враховувати пружні й в’язкі властивості середовища.

3 Числовий метод урахування опору середовища використовують у випадках, коли необхідно точно врахувати особливості петлі гістерезису і коли складно представити її в аналітичному вигляді. За цим методом для аналітичного описання процесу ущільнення використовують дослідну кусково-лінійну модель, у якій виділяють три стадії віброущільнення. Залежно від стадії бетонну суміш апроксимують: 1 – пружно-пластичним середовищем, яке зберігає деформації (початок ущільнення); 2 – пружно-пластичним середовищем із зміцненням і розвантаженням деформацій; 3 – середовищем, яке деформується лінійно (кінець процесу віброущільнення). При цьому методі система рівнянь руху робочого органа з урахуванням опору середовища складається з рівнянь руху робочого органа і коливань середовища [2].

При дослідженні впливу середовища на рух робочих органів вібромашини Л.І. Сердюк пропонує обмежитись дослідженням руху центра мас завантаження відповідно до теореми про рух центра мас системи [3]. При такому моделюванні середовище представляють у вигляді одиничної маси, яка зосереджена у центрі мас і взаємодіє з робочим органом у напрямку трьох осей координат за допомогою в’язів, які моделюють пружні, в’язкі та пластичні властивості середовища.

Якщо розглядати середовище жорстко приєднаним до робочого органа, то для відповідності розрахунків даним експериментів слід вважати, що не вся маса наявної у формі бетонної суміші впливає на коливання системи, а лише її частина, або так звана приєднана маса [4]. Це зручно зробити, скориставшись коефіцієнтом приєднаної маси, який являє собою відношення маси жорстко приєднаної до робочого органа вібромашини до всієї маси бетонної суміші у формі, котра спричиняє таке ж зменшення амплітуд вібропереміщень, як і вся бетонна суміш, що знаходиться у формі.

І.І. Назаренко, розглядаючи основні типи реологічних моделей [5], відмічає, що найбільш вживаною при врахуванні впливу бетонної суміші на рух робочих органів є модель Фойгта, яка дозволяє враховувати пружно-в’язкі властивості середовища.

Виділення не розв’язаних раніше частин загальної проблеми. Урахування впливу середовища на динаміку вібраційних машин за допомогою коефіцієнта приєднаної маси не дозволяє врахувати пружно-в’язкі властивості бетонної суміші, що ущільнюється. Отже, розроблення математичної моделі вібраційної машини для формування залізобетонних кілець, яка враховує взаємний вплив руху робочого органа, дебалансу й суміші, що наявна у формі при формуванні виробу, є актуальним завданням.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є висвітлення результатів математичного моделювання руху робочого органа вібраційної машини для формування залізобетонних кілець з урахуванням пружно-в’язких властивостей середовища, що ущільнюється.

Виклад основного матеріалу. Як правило, математичні моделі вібраційних машин подають у вигляді системи диференціальних рівнянь, складених за допомогою алгоритмів Лагранжа або Нільсена [6].

Для одержання диференціальних рівнянь руху системи «робочий орган – дебаланс – суміш» (РО–Д–С) скористаємось алгоритмом Нільсена, доцільність застосування якого неодноразово підтверджувалася в наукових працях [3, 7, 8].

З метою спрощення математичного апарату та скорочення обчислень при розв’язанні рівнянь прийнято ряд припущень, котрі базуються на досвіді, накопиченому при висвітленні питань математичного моделювання вібромашин, і не порушують точності отримуваних результатів:

1) ураховуючи конструктивні особливості вібраційної установки для формування залізобетонних кілець (вісесиметричність машини та виробу), розглядаємо її рух як сферичний;

2) бетонну суміш, наявну у формі, подаємо у вигляді одиничної маси, яка зосереджена в центрі мас і взаємодіє з робочим органом у напрямку трьох осей координат за допомогою в'язей, що моделюють пружні, в'язкі та пластичні властивості середовища [3];

3) рухому раму із закріпленим на ній віброосердям (із вібробуджувачем) і формою вважатимемо рівноцінним за масою твердим тілом, у якого геометрична вісь та вісь матеріальної симетрії збігаються;

4) зусилля, котрі виникають при деформації пружних елементів опор у робочому діапазоні, вважатимемо пропорційними величині деформації.

Зважаючи на прийняті конструктивні рішення запропонованої установки та враховуючи викладені вище припущення, розрахункову схему установки, наведемо у вигляді механічної системи РО–Д–С (рис. 1). Оскільки положення робочого органа в просторі при сферичному рухові можна однозначно задати трьома кутами повороту ψ, θ, φ навколо осей

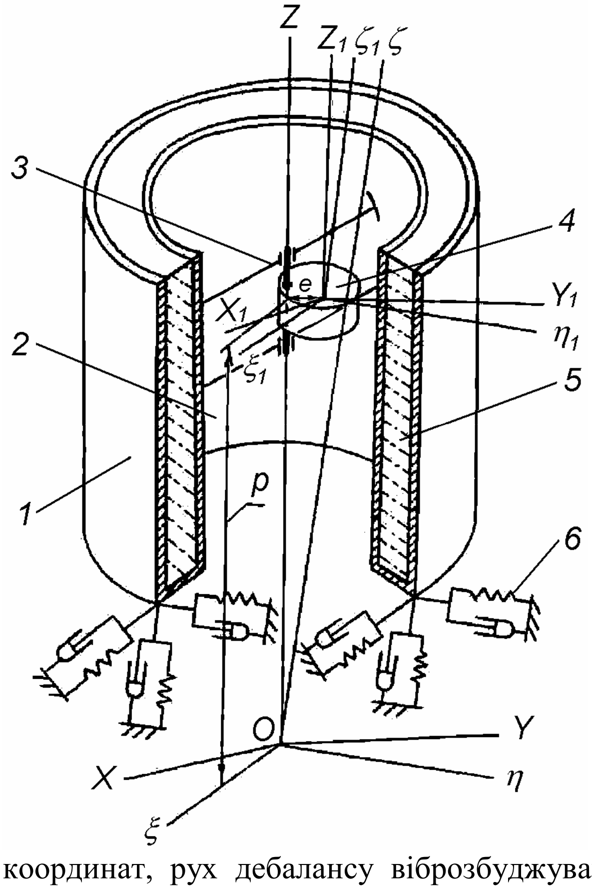

Рисунок 1 – Розрахункова схема вібраційної установки:
1 – форма; 2 – віброосердя; 3 – діафрагма; 4 – дебаланс; 5 – бетонна суміш; 6 – опори вібромашини

координат, рух дебалансу вібробуджувача за допомогою тих же кутів повороту і додатково кута повороту навколо осі симетрії віброустановки α, положення суміші, яка ущільнюється, визначиться кутами повороту ψ_1, θ_1, φ_1 навколо тих же осей координат, що й робочого органа, то система РО–Д–С матиме сім степенів вільності, а система рівнянь Нільсена складатиметься із семи диференціальних рівнянь другого порядку по семи узагальнених координатах, в якості яких приймемо кути поворотів $\theta,\psi,\varphi,\theta_1,\psi_1,\varphi_1,\alpha$,

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\theta}} - 2\frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_{\theta}; & \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\theta}_1} - 2\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = Q_{\theta_1}; \\ \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\psi}} - 2\frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_{\psi}; & \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\psi}_1} - 2\frac{\partial T}{\partial \psi_1} = Q_{\psi_1}; \\ \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\varphi}} - 2\frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}; & \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\varphi}_1} - 2\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}; \\ \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{\alpha}} - 2\frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_{\alpha}, & \end{array} \qquad (1)$$

де Т – кінетична енергія системи РО – Д – С;

$\dot{T}$ – повна перша похідна за часом від кінетичної енергії;

$\theta, \psi, \varphi, \alpha, \theta_1, \psi_1, \varphi_1$ – узагальнені координати;

$\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\alpha}, \dot{\theta}_1, \dot{\psi}_1, \dot{\varphi}_1$ – узагальнені швидкості;

$Q_{\theta}, Q_{\psi}, Q_{\varphi}, Q_{\alpha}, Q_{\theta_1}, Q_{\psi 1}, Q_{\varphi_1}$ – узагальнені сили.

Кінетичну енергію системи РО – Д – С знайдемо як суму кінетичних енергій робочого органа, дебалансу віброзбуджувача та суміші

$$T = T_{po} + T_{\partial} + T_c . \qquad (2)$$

Як показано в роботі [6], вирази кінетичної енергії робочого органа та дебалансу відповідно матимуть вигляд

$$T_{po} = \frac{1}{2}(J_x \dot{\theta}^2 + J_y \dot{\psi}^2 + J_z \dot{\varphi}^2); \qquad (3)$$

$$T_{Д} = \frac{1}{2}[I_x \dot{\theta}^2 + I_y \dot{\psi}^2 + I_z (\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2] - mpe(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})(\dot{\psi} cos \alpha + \dot{\theta} sin \alpha), \qquad (4)$$

де J_x, J_y, J_z – моменти інерції робочого органа відносно відповідних осей;

I_x, I_y, I_z – моменти інерції дебалансу відносно відповідних осей.

Аналогічним чином кінетична енергія суміші визначиться як

$$T_c = \frac{1}{2}(J_{xb} \dot{\theta}_1^2 + J_{yb} \dot{\psi}_1^2 + J_{zb} \dot{\varphi}_1^2), \qquad (5)$$

де J_{xb}, J_{yb}, J_{zb} – моменти інерції бетонної суміші відносно відповідних осей.

Підставивши рівняння (3), (4), (5) у формулу (2), отримаємо вираз кінетичної енергії системи РО–Д–С.

$$\begin{array}{l} T = \frac{1}{2}[(J_x + I_x) \dot{\theta}^2 + (J_y + I_y) \dot{\psi}^2 + (J_z + I_z) \dot{\varphi}^2 + \\ \quad + I_z \dot{\alpha}^2] + \frac{1}{2}(J_{xb} \dot{\theta}_1^2 + J_{yb} \dot{\psi}_1^2 + J_{zb} \dot{\varphi}_1^2) + I_z \dot{\alpha} \dot{\varphi} - \\ \quad - mpe(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})(\dot{\psi} cos \alpha + \dot{\theta} sin \alpha). \end{array} \qquad (6)$$

Знайдемо повну похідну кінетичної енергії за часом

$$\begin{aligned}\dot{T}=&(J_x+I_x)\dot{\theta}\ddot{\theta}+(J_y+I_y)\dot{\psi}\ddot{\psi}+(J_z+I_z)\dot{\varphi}\ddot{\varphi}+J_{xb}\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1+\\&+J_{yb}\dot{\psi}_1\ddot{\psi}_1+J_{zb}\dot{\varphi}_1\ddot{\varphi}_1+J_z\dot{\alpha}\ddot{\alpha}+I_z\ddot{\alpha}\dot{\varphi}-mpe[(\ddot{\varphi}+\ddot{\alpha})(\dot{\psi}\cos\alpha+\\&+\dot{\theta}\sin\alpha)+(\dot{\varphi}+\dot{\alpha})(\ddot{\psi}\cos\alpha-\dot{\psi}\dot{\alpha}\sin\alpha+\ddot{\theta}\sin\alpha+\dot{\theta}\dot{\alpha}\cos\alpha)].\end{aligned}\tag{7}$$

Тоді частинні похідні по узагальнених швидкостях від повної похідної кінетичної енергії та по узагальнених координатах від кінетичної енергії матимуть вигляд

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\theta}}=(J_x+I_x)\ddot{\theta}-mpe[(\ddot{\varphi}+\ddot{\alpha})\sin\alpha+(\dot{\varphi}\dot{\alpha}+\dot{\alpha}^2)\cos\alpha];\\&\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\psi}}=(J_y+I_y)\ddot{\psi}-mpe[(\ddot{\varphi}+\ddot{\alpha})\cos\alpha+(\dot{\varphi}\dot{\alpha}+\dot{\alpha}^2)\sin\alpha;\\&\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\varphi}}=(J_z+I_z)\ddot{\varphi}+C_z\ddot{\alpha}-mpe[(\ddot{\psi}+\dot{\theta}\dot{\alpha})\cos\alpha+(\ddot{\theta}-\dot{\psi}\dot{\alpha})\sin\alpha];\\&\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\theta}_1}=J_{xb}\ddot{\theta}_1\ \frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\psi}_1}=J_{yb}\ddot{\psi}_1\ \frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\varphi}_1}=J_{zb}\ddot{\varphi}_1;\\&\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{\alpha}}=I_z(\ddot{\varphi}+\ddot{\alpha})-mpe[(\ddot{\psi}+2\dot{\alpha}\dot{\theta}+\dot{\varphi}\dot{\theta})\cos\alpha+(\ddot{\theta}-2\dot{\alpha}\dot{\psi}+\dot{\varphi}\dot{\psi})\sin\alpha];\\&\frac{\partial T}{\partial\theta}=\frac{\partial T}{\partial\psi}=\frac{\partial T}{\partial\varphi}=\frac{\partial T}{\partial\theta_1}=\frac{\partial T}{\partial\psi_1}=\frac{\partial T}{\partial\varphi_1}=0;\\&\frac{\partial T}{\partial\alpha}=-mpe(\dot{\varphi}+\dot{\alpha})(\dot{\theta}\cos\alpha+\dot{\psi}\sin\alpha).\end{aligned}\tag{8}$$

Позначимо пружні та в’язкі властивості опор коефіцієнтами пружності c_θ, c_ψ, c і в’язкого опору $k_\theta, k_\psi, k_\varphi$ у напрямах відповідних переміщень. З урахуванням викладених вище припущень в’язі між бетонною сумішшю та робочим органом установки подамо у вигляді пружних елементів із жорсткістю $c_{\theta1}, c_{\psi1}, c_{\varphi1}$ і в’язких елементів із коефіцієнтами опору $k_{\theta1}, k_{\psi1}, k_{\varphi1}$ у відповідних напрямах.

До дебалансного вала прикладений обертальний момент від привідного двигуна M_d та момент сил опору M_o.

Позначимо переміщення і швидкості суміші, яка ущільнюється, відносно робочого органа як

$$\begin{aligned}&\Delta\theta=\theta_1-\theta;\Delta\psi=\psi_1-\psi;\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi;\\&\Delta\dot{\theta}=\dot{\theta}_1-\dot{\theta};\Delta\dot{\psi}=\dot{\psi}_1-\dot{\psi};\Delta\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}.\end{aligned}\tag{9}$$

Урахувавши викладене вище, складемо вирази узагальнених сил, що відповідають узагальненим координатам,

$$
\begin{aligned}
&Q_\theta = -k_\theta \dot{\theta} - C_\theta \theta + k_{\theta 1} \Delta \dot{\theta} + C_{\theta 1} \Delta \theta;\\
&Q_{\theta 1} = -k_{\theta 1} \Delta \dot{\theta} - C_{\theta 1} \Delta \theta;\\
&Q_\psi = -k_\psi \dot{\psi} - C_\psi \psi + k_{\psi 1} \Delta \dot{\psi} + C_{\psi 1} \Delta \psi;\\
&Q_{\psi 1} = -k_{\psi 1} \Delta \dot{\psi} - C_{\psi 1} \Delta \psi;\\
&Q_\varphi = -k_\varphi \dot{\varphi} - C_\varphi \varphi + k_{\varphi 1} \Delta \dot{\varphi} + C_{\varphi 1} \Delta \varphi;\\
&Q_{\varphi 1} = -k_{\varphi 1} \Delta \dot{\varphi} - C_{\varphi 1} \Delta \varphi = 0;\\
&Q_\alpha = M_d - M_o.
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

Підставивши рівняння (8) і (10) у формулу (1), одержимо диференціальні рівняння руху системи РО–Д–С в узагальнених координатах.

$$
\left.
\begin{aligned}
&(J_x + I_x)\ddot{\theta} - mpe[(\ddot{\varphi} + \ddot{\alpha})\sin\alpha + (\dot{\varphi}\dot{\alpha} + \dot{\alpha}^2)\cos\alpha] +\\
&+k_\theta \dot{\theta} + C_\theta \theta - (k_{\theta 1} \Delta \dot{\theta} + C_{\theta 1} \Delta \theta) = 0;\\
&J_{xb} \ddot{\theta}_1 + k_{\theta 1} \Delta \dot{\theta} + C_{\theta 1} \Delta \theta = 0;\\
&(J_y + I_y)\ddot{\psi} - mpe[(\ddot{\varphi} + \ddot{\alpha})\cos\alpha - (\dot{\varphi}\dot{\alpha} + \dot{\alpha}^2)\sin\alpha] +\\
&+k_\psi \dot{\psi} + C_\psi \psi - (k_{\psi 1} \Delta \dot{\psi} + C_{\psi 1} \Delta \psi) = 0;\\
&J_{yb} \ddot{\psi}_1 + k_{\psi 1} \Delta \dot{\psi} + C_{\psi 1} \Delta \psi = 0;\\
&(J_z + I_z)\ddot{\varphi} + I_z \ddot{\alpha} - mpe[(\ddot{\psi} + \dot{\theta}\dot{\alpha})\cos\alpha + (\ddot{\theta} - \dot{\psi}\dot{\alpha})\sin\alpha] +\\
&+k_\varphi \dot{\varphi} + C_\varphi \varphi - (k_{\varphi 1} \Delta \dot{\varphi} + C_{\varphi 1} \Delta \varphi) = 0;\\
&J_{zb} \ddot{\varphi}_1 + k_{\varphi 1} \Delta \dot{\varphi} + C_{\varphi 1} \Delta \varphi = 0;\\
&I_z(\ddot{\varphi} + \ddot{\alpha}) + mpe[(\dot{\varphi}\dot{\theta} - \ddot{\psi})\cos\alpha - (\dot{\varphi}\dot{\psi} + \ddot{\theta})\sin\alpha] = M_d - M_o.
\end{aligned}
\right\}
\quad (11)
$$

Висновок. У результаті математичного моделювання отримано систему нелінійних диференціальних рівнянь, які дозволяють ураховувати взаємний вплив руху робочого органа, дебалансу й суміші, що наявна у формі при формуванні виробу, а також досліджувати рух системи як у сталому режимі, так і в період розгону та зупинки.

ЛІТЕРАТУРА

1. *1. Сивко В.И. Основы механики вибрируемой смеси / В.И. Сивко – К.: Вища шк., 1987. – 168 с.*
2. *2. Сівко В.Й. Визначення опору середовища і методика його врахування в розрахунках будівельних машин / В.Й. Сівко, В.М. Михайленко, А.О. Таркуцяк // Вибротехнология 98. Обработка дисперсных материалов и сред. Теория, исследования, технологии, оборудование. Сб. науч. тр.: В 2 ч. – Одесса: НПО "ВОТУМ", 1998. – С. 29 – 35.*
3. *3. Сердюк Л.И. Основы теории, расчет и конструирование управляемых вибрационных машин с дебалансными возбудителями: автореф. дис. на соискание науч. степени докт. техн. наук / Л.И. Сердюк. – Х., 1991. – 28 с.*

4. 4. Борщевский А.А. Механическое оборудование для производства строительных материалов и изделий / А.А. Борщевский, А.С. Ильин – М.: Высш. шк., 1987. – 368 с.

5. 5. Назаренко І.І. Машини для виробництва будівельних матеріалів / І.І. Назаренко. – К.: КНУБА, 1999. – 488 с.

6. 6. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

7. 7. Добронравов В.В. Основы аналитической механики / В.В. Добронравов. – М.: Высш. шк., 1976. – 264 с.

8. 8. Жигилий С.М. Управляемая вибрационная машина для подготовки металлической фибры: автореф. дис. на стиск. науч. степени канд. техн. наук: 05.05.02 / С.М. Жигилий. – Полтава, ПДТУ, 1997. – 18 с.

Надійшла до редакції 29.01.2010 р.

© О.В. Орисенко, Т.М. Нестеренко