УДК 697.004.18

Э.Н. Кривобок, канд. техн. наук, доцент
Полтавский национальный технический
университет им. Юрия Кондратюка

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕОДНОРОДНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Обґрунтована можливість і доцільність використання методу інтегральних перетворень (Лапласа) для розв'язання рівняння нестаціонарної теплопровідності твердих тіл із неоднорідними початковими умовами. Запропонований спосіб рішення придатний для тіл різної форми і, як правило, зводиться до відомих рішень.

Ключові слова: *рівняння теплопровідності, неоднорідні початкові умови, метод інтегральних перетворень (Лапласа).*

Обоснована возможность и целесообразность использования метода интегральных преобразований (Лапласа) для решения уравнения нестационарной теплопроводности твердых тел с неоднородными начальными условиями. Предложенный способ решения пригоден для тел разной формы и, как правило, сводится к известным решениям.

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, неоднородные начальные условия, метод интегральных преобразований (Лапласа).*

The possibility and expedient of using of integral transformations (Laplasa) method to the decision of the equation of non-stationary heat conductivity of hard solids with non-homogeneous initial conditions is proved. Preposed method of the decision is of use for solids of different form and, as a rule, is resulted in well-known decisions.

Keywords: *the equation of heatconductivity, non-homogeneous initial conditions, the method of integral transformations (Laplasa).*

Постановка проблемы. Для решения уравнения нестационарной теплопроводности твердых тел предложено множество методов. Их многообразие обусловлено прежде всего различием формы тел и условий однозначности (начальных и граничных условий). С одной стороны, это позволяет найти необходимый для конкретного случая метод решения, но с другой – создает определенные трудности как при идентификации нужного метода, так и при его практическом использовании, поскольку степень математической сложности разных методов существенно различается. Поэтому важное значение имеет расширение области применимости наиболее простых и апробированных в расчетной практике методов.

Анализ исследований и публикаций. К числу таких методов относится, как известно, метод интегральных преобразований (Лапласа) [1 – 6]. Его несомненное преимущество перед другими методами заключается в том, что путем перехода в область изображений решение дифференциального уравнения теплопроводности в частных производных зачастую сводится к решению обычных алгебраических уравнений. Причем сама процедура перехода в область изображений и обратного перехода к оригиналу состоит из набора стандартных операций, для проведения которых составлены подробные вспомогательные таблицы. Получаемое при этом конечное решение содержит, как правило, табулированные функции, не требует дополнительной доработки и, что особенно важно, пригодно для любых моментов переходного процесса, включая первоначальные. Однако такой упрощенный и удобный алгоритм решения имеет место лишь при однородных (одинаковых по пространственным координатам) начальных условиях. В случае неоднородного начального температурного распределения решение по этому методу существенно усложняется. Поэтому обычно рекомендуется классический метод разделения переменных [1 – 6], приводящий решение к некоторому интегралу, строгое вычисление которого не всегда возможно (особенно при сложных начальных условиях).

Отметим ещё следующее обстоятельство. Поскольку итоговое решение по этому методу выражается по сути бесконечным рядом гармоник разной частоты, то для малых моментов времени, когда относительная координата зоны теплового возмущения (отнесенная к характерному размеру тела) практически стремится к нулю, необходимо принимать большое количество членов ряда, что существенно усложняет расчеты. Использование же специальных операционных методов (Фурье, Ханкеля и др.) [1 – 6] требует двойного интегрального преобразования по временной и пространственной координатам, а полученный результат также нуждается в дополнительной доработке.

В то же время путем соответствующей редукции возможно приведение сложных задач теплопроводности с неоднородным начальным распределением к нулевым начальным условиям. Решение при этом осуществляется стандартным операционным методом (Лапласа) со всеми преимуществами последнего и зачастую сводится к решению элементарных задач.

Не решенные ранее части общей проблемы. Расчленение (редукция) неоднородных задач на несколько более простых широко используется в расчетной практике [1 – 8]. Однако практикуемые способы расчленения исходной задачи неизбежно приводят к необходимости решения хотя бы одной частной задачи с неоднородными начальными условиями. В работе [8] предпринята даже попытка теоретического обоснования обязательного появления неоднородности в начальном условии, что, по-видимому, объясняется сложившимся стереотипом практикуемых приемов.

Цель статьи – обоснование способа приведения краевых задач теплопроводности с неоднородным начальным распределением к нулевым начальным условиям с последующим использованием метода интегральных преобразований (Лапласа) и тем самым расширением области его применения.

Изложение основного материала. Особенности и преимущества предлагаемого способа поясним на простом примере линейного теплового потока в полуограниченном массиве при неоднородном начальном распределении $f(x)$ и граничном условии I рода (постоянной температуре $t_н$ на поверхности массива).

Математическая формулировка задачи:

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2}, \qquad \tau > 0, \qquad 0 < x < \infty; \tag{1}$$

$$t(x,0) = f(x), \qquad \tau = 0, \qquad 0 < x < \infty; \tag{2}$$

$$t(0,\tau) = t_н = const, \qquad \tau > 0, \qquad x = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial t(\infty,\tau)}{\partial x} = 0, \qquad \tau > 0, \qquad x \to \infty. \tag{4}$$

Искомую функцию $t(x,\tau)$ представим суммой двух переменных

$$t(x,\tau) = f(x,\tau) + u(x,\tau), \qquad (5)$$

где функция $f(x,\tau)$ описывает в данном случае начальное температурное распределение $f(x)$ и принимается неизменной в течение всего переходного процесса.

Для стабилизации начального теплового состояния необходимо допустить наличие в теле непрерывно действующих объемных источников, удельная мощность которых $\omega(x)$подчинятся соотношению

$$d^2 f(x)/dx^2 + \omega(x)/\lambda = 0. \qquad (6)$$

Тогда дифференциальное уравнение для переменной $u(x,\tau)$, определяемой разностью

$$u(x,\tau) = t(x,\tau) - f(x), \qquad (7)$$

необходимо дополнить обратными по знаку непрерывно действующими объемными источниками (стоками) той же интенсивности, т.е. для переменной $u(x,\tau)$ с учетом формулы (7) имеем

$$\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} - \frac{\omega(x)}{c\cdot\rho}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < \infty; \qquad (8)$$

$$u(x,\tau) = f(x) - f(x) = 0\,, \qquad \tau = 0; \qquad (9)$$

$$u(0,\tau) = u_п = t_п - f(0), \qquad x = 0; \qquad (10)$$

$$\partial u(\infty,\tau)/\partial x = 0, \qquad x \to \infty, \qquad \tau > 0, \qquad (11)$$

где $f(0)$, $t_п$ – соответственно начальная и граничная температуры поверхности тела.

В результате получили вспомогательную задачу нагрева полупространства с внутренними стоками источником постоянной температуры на поверхности. Несмотря на неоднородность уравнения (8), его решение при начальных условиях не вызывает затруднений и обеспечивается обычным операционным методом.

При равномерном или линейном начальном распределении исходной задачи внутренние источники отсутствуют $(d^2 f(x)/dx^2 = 0)$ и решение вспомогательной задачи сводится к известному решению с нулевым начальным условием без внутренних источников [1 – 6]

$$\frac{u(x,\tau)}{u_П} = \frac{t(x,\tau) - f(x)}{t_П - f(0)} = erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\,. \qquad (12)$$

Например, при $f(x) = f(0) + k\cdot x$ и $t_П = 0$ имеем

$$t(x,\tau) = f(0)\cdot erf\,(x/2\cdot\sqrt{a\tau}) + k\cdot x, \qquad (13)$$

что соответствует известному решению [1].

Удобным получается решение при квадратичном начальном распределении исходной задачи. Удельная мощность внутренних источников в этом случае постоянна $(d^2 f(x)/dx^2 = const)$ и решение вспомогательной задачи также сводится к известному решению с объемными стоками постоянной мощности ω_0 и нулевыми начальными условиями [2]

$$\frac{t(x,\tau) - f(x)}{t_П - f(0)} = erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{\omega_0\tau}{c\rho[t_П - f(0)]}\left(1 - 4i^2 erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right). \qquad (14)$$

Решение (14) пригодно для любой формы квадратичного начального распределения в виде одно-, двух- или трехчлена.

В случае экспоненциального начального распределения, например $f(x) = b\cdot\exp(-kx)$, имеем $\omega(x) = \omega_o\cdot\exp(-kx)$, где $\omega_o = -\lambda b k^2$.

Получили вариант известной задачи с экспоненциально изменяющимися по координате внутренними стоками и нулевыми начальными условиями [2]

$$\frac{t(x,\tau)-f(x)}{t_{П}-f(0)}=erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}+\frac{\omega_0}{\lambda k^2[t_{П}-f(0)]}\Big[erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}-$$
$$-\exp(-kx)-0{,}5\exp(k^2a\tau-kx)\cdot erfc\left(k\sqrt{a\tau}-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)+$$
$$+0{,}5\exp(k^2a\tau+kx)\cdot erfc\left(k\sqrt{a\tau}+\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)\Big]. \qquad (15)$$

Аналогичным образом могут быть получены решения и при других начальных условиях и формах тела. Так при симметричном нагреве неограниченной пластины толщиной 2δ с параболическим начальным распределением средой постоянной температуры t_c получаем вариант «остывающей» пластины с внутренними стоками постоянной мощности ω_o от нулевого уровня [2]

$$\frac{t(x,\tau)-f(x)}{t_c-t_c'}=1-0{,}5\cdot Po\left(1-\frac{x^2}{\delta^2}+\frac{2}{Bi}\right)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{Po}{\mu_n^2}\right)\cdot A_n\cdot\cos\mu_n\frac{x}{\delta}\cdot\exp(-\mu_n^2Fo), \qquad (16)$$

где критерий Померанцева Po для данного случая равен

$$Po=\omega_0\delta^2/\lambda(t_c-t_c'), \qquad (17)$$

а условная температура среды t'_c определяется по формуле

$$t'_c=f(x)+\frac{\lambda}{\delta}\cdot\frac{df(x)}{dx}, \qquad x=\delta. \qquad (18)$$

Например, при $f(x)=b-kx^2$ имеем

$$Po=2k\delta^2/(t_c-t_c'), \qquad t_c'=b-k\delta^2(1+2/Bi).$$

Известное решение при таком же начальном условии и $t_c=0$ имеет вид [1]

$$t(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2bBi\,\mu_n^2-2k\delta^2[\mu_n^2(Bi+2)-2Bi]}{\mu_n^2(\mu_n^2+Bi^2+Bi)\cos\mu_n}\times$$
$$\times\cos\mu_n\frac{x}{\delta}\cdot\exp(-\mu_n^2Fo). \qquad (19)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в идентичности результатов расчета по формулам (16) и (19).

Выводы:

1. Предлагаемый способ приведения сложных задач теплопроводности к нулевым начальным условиям расширяет область применения стандартного метода интегральных преобразований (Лапласа).
2. Итоговое решение не требует дополнительной доработки и в большинстве случаев сводится к известным решениям простых задач.
3. Универсальность способа позволяет его использование для тел различной геометрической формы.
4. Способ позволяет выявлять связи между решениями задач при отсутствии и наличии внутренних источников. Тем самым появляется возможность разработки единой методологической основы решения разнотипных задач теплопроводности для разных тел с разнообразными условиями однозначности.

Обозначения:

t, u – температура; τ – время; x – координата; q – тепловой поток; δ – толщина пластины; λ, a – коэффициенты тепло- и температуропроводности; c – удельная теплоемкость; ρ – плотность; b, k – постоянные; ω – удельная мощность непрерывно действующих объемных источников; μ_n – корни характеристических уравнений [2]; A_n – начальные тепловые амплитуды [2]; Po – критерий Померанцева; Bi – критерий Био; Fo – число Фурье.

Литература

1. *Карслоу Х.С. Теплопроводность твердых тел / Х.С. Карслоу, Д.К. Егер. – М.: Наука, 1964. – 487 с.*
2. *Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.*
3. *Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966, – 724 с.*
4. *Беляев Н.М. Методы нестационарной теплопроводности / Н.М. Беляев, Р.В. Рядно. – М.: Высшая школа, 1970. – 476 с.*
5. *Карташев Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташев. – М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.*
6. *Цой П.В. Методы решения задач тепломассопереноса / П.В. Цой. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 415 с.*
7. *Пехович А.И. Расчеты теплового режима твердых тел / А.И. Пехович, В.М. Жидких. – Л.: Энергия, 1976. – 351 с.*
8. *Котляр Я.М. Методы и задачи тепломассообмена / Я.М. Котляр, В.Д. Совершенный, Д.С. Стриженов. – М.: Машиностроение, 1987. – 318 с.*

Надійшла до редакції 29.03.. 2010