УДК 624.042:534.1:539.67

Л.І. Зав'ялова, к.т.н., доц., О.Є. Курдюков, студент 4-го курсу

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

ПРО ТОЧНІ РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КОЛИВАНЬ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТЕПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ ЗІ ЗМІШАНИМ ОПОРОМ

Досліджено коливання системи з одним степенем вільності при спільному врахуванні в'язкого та внутрішнього (комплексного) тертя за Є.С. Сорокіним. Знайдені точні рішення нелінійної задачі вимушених коливань у дійсній області.

***Ключові слова**: коливання, внутрішнє тертя, нелінійна задача.*

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими практичними завданнями. Протягом останніх десятиліть у рамках спектральної теорії сейсмостійкості виникли різні напрями, серед яких у першу чергу слід відзначити метод розрахунку за акселерограмою, ймовірнісні методи розрахунку, методи розрахунку з урахуванням пружно-пластичних деформацій, в'язі, що виключаються, та деякі інші, які визначають сучасний рівень розвитку теорії сейсмостійкості споруд.

Відзначимо деякі найбільш важливі напрями в теорії сейсмостійкості споруд.

Один із них – моделювання взаємодії споруди з ґрунтом основи. У найбільш загальній постановці ця проблема може бути сформульована у вигляді динамічної контактної задачі сполучення основи і споруди. Актуальність цієї проблеми полягає в тому, що навіть первісні, досить грубі, моделі цієї задачі призводять до того, що облік піддатливості підстави істотним чином впливає на характер напружено-деформованого стану споруди. Слід визнати, що на сьогодні проблема ще надто далека до свого розв'язання, оскільки коректна математична модель даної задачі включає в себе досить широкий спектр питань, що потребують ретельного розроблення. Разом із тим у сучасній літературі міститься досить багато досліджень, присвячених розв'язанню тих чи інших аспектів цієї проблеми. Так, наприклад, у припущенні, що підставу може бути представлено пружним півпростором, а сейсмічну дію – у вигляді деякого хвильового процесу, вирішено багато задач дифракції хвиль на фундаменті споруди, що визначають характер сейсмічного впливу на його конструкцію.

Інший напрям, більш близький до інженерних методів, пов'язаний з уведенням деяких параметрів жорсткості підстави, що визначаються на основі або чисто експериментальних досліджень, або на основі теоретико-експериментальних підходів, що враховують хвильовий характер сейсмічної дії. Мабуть, сюди ж потрібно віднести проблему розрахунку на сейсмічну дію протяжних у плані споруд, коли їх довжина порівнянна з довжиною напівхвилі цього впливу.

Другий найбільш важливий напрям у теорії сейсмостійкості споруд – урахування геометричної та фізичної нелінійності. Проблема обліку геометричної нелінійності є актуальною, швидше за все, для досить гнучких споруд (типу димових труб, щогол і т.д.), де цей ефект може мати вплив на результати сейсмічного розрахунку. Інша справа, коли мова йде про облік фізичної нелінійності. Тут ця проблема набуває досить чіткі риси і може бути сформульована у вигляді задачі обліку властивостей матеріалу конструкції споруди, що визначається нелінійною діаграмою залежності напружень від деформації (або зусиль від переміщень). В основному ця проблема найбільш актуальна для споруд, несучі конструкції яких виконані із залізобетону. Як відомо, в цьому випадку апроксимація істинної діаграми деформування лінійною представляється дуже проблематичною, особливо, коли зовнішні впливи є високоінтенсивними, що характерно для сильних землетрусів.

Слід зазначити, що в даний час ведуться дослідження в цьому напрямі, й уже отримані перші обнадійливі результати, зведення яких виконано в роботах Н.А. Ніколаєнко, Ю.П. Назарова, В.А. Ржевського та інших.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, у яких започатковано розв'язання даної проблеми. Розгляд коливального процесу має фундаментальне значення як в динаміці споруд взагалі, так і в сейсміці зокрема, оскільки дозволяє виявити основні закономірності перебігу цього процесу, які так чи інакше проявляються у випадку наявності більш складних розрахункових схем.

Тут слід звернути увагу на ту обставину, що як зовнішній вплив можуть бути використані відомі функції змін у часі або переміщень, що властиво для постановок динамічних задач при збудженні кінематичного типу [5], або прискорень, що характерно для постановки завдань сейсмостійкості споруд.

При математичному моделюванні коливань механічної системи в навколорезонансних режимах необхідно враховувати процеси розсіювання (поглинання) енергії за рахунок власних демпфірувальних властивостей окремих ланок і пружних зв'язків [1– 4, 7].

У разі врахування дисипації енергії при складанні рівнянь руху повинні додатково братися до уваги сили опору.

Опускаючи подробиці, відомі з курсу динаміки споруд, відзначимо, що в практиці сейсмічних розрахунків неконсервативних систем у даний час найбільш часто застосовуються дві моделі обліку сил опору – за гіпотезою Є.С. Сорокіна [9] і за гіпотезою Фогта [8]. Згідно з однією з них узагальнена сила тертя залежить від амплітуди коливань і не залежить від швидкості руху осцилятора (гістерезисна модель). У другій моделі передбачається, що сила тертя залежить від швидкості руху осцилятора (модель в'язкого тертя, або швидкісна модель).

Виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття. У сучасній інженерній практиці часто зустрічаються задачі, які зводяться до дослідження коливань систем із непружними опорами різного характеру [1, 3, 4]. При вирішенні таких задач виникають значні математичні складності, тому що внутрішній опір підпорядковується нелінійним залежностям [8]. Для створення надійного алгоритму вирішення подібних задач необхідно використовувати методи, які дуже добре піддаються програмуванню на ПЕОМ.

Для системи з одним степенем вільності при спільному врахуванні в'язкого та внутрішнього (комплексного) тертя за Є.С. Сорокіним така задача вирішена у роботі [6]. Однак для розвитку подібних методів необхідно мати точні рішення такої задачі в дійсній області. Це питання і визначило мету роботи.

Мета. Дослідити коливання системи з одним степенем вільності при спільному врахуванні в'язкого та внутрішнього (комплексного) тертя за Є.С. Сорокіним. Знайти точні рішення нелінійної задачі вимушених коливань у дійсній області.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо розв'язок задачі про вільні коливання системи з одним степенем вільності, які супроводжуються дією сил внутрішнього та зовнішнього тертя.

Спосіб урахування сил внутрішнього тертя заснований на припущенні Сорокіна Є.С. про те, що вихідна залежність «узагальнена сила – узагальнена координата» має вигляд [7]

$$N = -cy \pm \frac{\alpha}{\pi} A^n \sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}}, \tag{1}$$

де A – амплітуда узагальненої координати y; α та n – постійні конструкції;
c – коефіцієнт жорсткості.

Спосіб урахування сил зовнішнього опору

$$\vec{R} = -\gamma \vec{V},$$

де γ – коефіцієнт в'язкості, який у цілому визначається експерименталь- ним шляхом.

Після введення позначення $\frac{\gamma}{m} = 2k$ та $\frac{c}{m} = p^2$ диференціальне рівняння вільних коливань такої системи можна записати у вигляді

$$\ddot{y}+2k\dot{y}+p^2y\pm\frac{\alpha}{\pi m}A^n\sqrt{1-\frac{y^2}{A^2}}=0. \qquad (2)$$

Якщо позначити частоту затухаючих коливань системи буквою ω_1, то очікуване рішення рівняння (2) можна записати у вигляді

$$y=A(t)\cos\omega_1 t. \qquad (3)$$

Щоб переконатися в цьому, підставимо очікуване рішення (3) в диференціальне рівняння (2) та, перетворивши результат підстановки, одержимо

$$[\ddot{A}+2k\dot{A}+(p^2-\omega_1^2)]\cos\omega_1 t-[2\dot{A}\omega_1+2kA\omega_1+\frac{\alpha}{\pi m}A^n]\sin\omega_1 t=0. \qquad (4)$$

Для тотожного виконання цієї рівності необхідно, щоб порізно дорівнювали нулю обидва вирази, які стоять у квадратних дужках:

$$\ddot{A}+2k\dot{A}+(p^2-\omega_1^2)=0, \qquad (5)$$

$$2\omega_1\dot{A}+2k\omega_1 A+\frac{\alpha}{\pi m}A^n=0. \qquad (6)$$

Ці рівняння стосуються, власне, не коливального процесу, а огинаючої кривої коливань та частоти затухаючих коливань; проте саме вони являють першочерговий інтерес.

Вирішимо систему рівнянь (5) – (6) для випадку, коли n=1 (лінійний варіант пропозиції Сорокіна Є. С.).

Проінтегрувавши рівняння (6) та задовольнивши початкові умови $A=A_0$ при $t=0$, отримаємо

$$A=A_0\exp\{-(k+\frac{\alpha}{2\pi m\omega_1})t\}. \qquad (7)$$

Підставивши це рішення в диференціальне рівняння (5), одержимо рівняння

$$p^2-k^2-\omega_1^2+\frac{\alpha^2}{4\pi^2m^2\omega_1^2}=0, \qquad (8)$$

з якого знайдемо значення частоти затухаючих коливань

$$\omega_1=\sqrt{\frac{p^2-k^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-k^2)^2+\frac{\alpha^2}{\pi^2m^2}}}. \qquad (9)$$

З 4-х коренів рівняння (8) фізичний зміст задачі задовольняє лише корінь (9), тому що решта – або уявні, або негативні.

Тоді обвідна кривої коливань буде мати вигляд

$$A=A_0\exp\left\{-\left(k+\alpha\Big/2\pi m\sqrt{\frac{p^2-k^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-k^2)^2+\frac{\alpha^2}{\pi^2m^2}}}\right)t\right\}, \qquad (10)$$

а рішення рівняння (2)

$$y=A_0\exp\left\{-\left(k+\alpha\Big/2\pi m\sqrt{\frac{p^2-k^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-k^2)^2+\frac{\alpha^2}{\pi^2m^2}}}\right)t\right\}\times$$

$$\times\cos\left(\sqrt{\frac{p^2-k^2}{2}+\sqrt{(p^2-k^2)^2+\frac{\alpha^2}{\pi^2m^2}}}\cdot t+\delta\right). \qquad (11)$$

При $\alpha \to 0$ отримуємо в межі рішення для задачі з в'язким тертям, при $k \to 0 (\gamma \to 0)$ – рішення для задачі з внутрішнім тертям, яке відповідає гіпотезі Є.С. Сорокіна.

Для системи зі змішаним тертям диференціальне рівняння коливань, викликані дією гармонійної вимушеної сили, має вигляд

$$\ddot{y} + 2k\dot{y} + p^2 y \pm \frac{\alpha}{\pi m} A^m \sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}} = \frac{Q_0}{m} \sin \omega t \,. \tag{12}$$

Це нелінійне рівняння має досить просте точне часткове рішення

$$y = A \sin(\omega t - \beta) \,. \tag{13}$$

Перетворивши результат підстановки часткового рішення (13) в диференціальне рівняння (12), одержимо

$$[A(p^2 - \omega^2)\cos\beta + (2k\omega A + \frac{\alpha}{\pi m} A^n)\sin\beta - \frac{Q_0}{m}]\sin\omega t -$$

$$-[A(p^2 - \omega^2)\sin\beta - (2k\omega A + \frac{\alpha}{\pi m} A^n)\cos\beta]\cos\omega t = 0.$$

Для тотожного виконання цієї рівності необхідно, щоб порізно дорівнювали нулю обидва вирази, які стоять у квадратних дужках:

$$A(p^2 - \omega^2)\cos\beta + (2k\omega A + \frac{\alpha}{\pi m} A^n)\sin\beta - \frac{Q_0}{m} = 0 \,, \tag{14}$$

$$A(p^2 - \omega^2)\sin\beta - (2k\omega A + \frac{\alpha}{\pi m} A^n)\cos\beta = 0 \,. \tag{15}$$

Із цих рівнянь знаходимо числа A і β, що роблять вираз (13) рішенням рівняння (12),

$$tg\beta = \frac{2k\omega + \frac{\alpha}{\pi m} A^{n-1}}{p^2 - \omega^2} \,,$$

$$A = \frac{y_{cm}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{p^2})^2 + (\frac{2k\omega}{p^2} + \frac{\alpha}{\pi c} A^{n-1})^2}} \,, \tag{16}$$

де y_{cm} – статичне відхилення системи при дії на неї сили Q_0.

Рівність (16) є формулою, яка безпосередньо визначає амплітуду коливань тільки у випадку, коли n = 1,

$$A = \frac{y_{cm}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{p^2})^2 + (\frac{2k\omega}{p^2} + \frac{\alpha}{\pi c})^2}} \,. \tag{17}$$

В інших випадках рівність (16) слід розглядати як рівняння, що містить амплітуду коливань в обох частинах рівності.

Таким чином можна знайти амплітуду стаціонарних коливань з урахуванням в'язкого і частотно-незалежного опору.

Якщо у виразі (17) покласти рівним нулю α, отримаємо формулу залежності амплітуди при в'язкому терті, якщо прирівняти нулю коефіцієнт в'язкого тертя *k*, то вираз (17) буде відповідати амплітуді при частотно-незалежному опорі.

Висновок. Для коливальної системи з одним степенем вільності при спільному врахуванні в'язкого та внутрішнього (комплексного) тертя за Є.С. Сорокіним знайдено точне рішення нелінійного диференціального рівняння вимушених коливань у дійсній області. Створено надійний алгоритм дослідження коливань систем із непружними опорами різного характеру, який добре піддається програмуванню на ПЕОМ.

Література

1. Дукарт, А.В. Об установившихся колебаниях двухмассовой системы с демпфированием при произвольной возмущающей нагрузке / А.В. Дукарт // Известия вузов. Строительство. – 2009. – № 3–4. – С. 3 – 13.

2. Вибрации в технике: справочник. Т.4. Вибрационные процессы и машины / под ред. Э.Э. Лавендела. – М.: Машиностроение, 1981. – 509 с.

3. Дукарт, А.В. Оптимальные параметры и эффективность одномассового динамического гасителя колебаний с вязким трением при периодической возмущающей нагрузке типа «прямоугольный синус» / А.В. Дукарт //Вестник Московского строительного университета. – 2009. – № 4. – С. 92 – 100.

4. Дукарт, А.В. Мультиконтинуальный гаситель колебаний цилиндрической оболочки / А.В. Дукарт, А.И Олейник / Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2007. – № 12. – С. 10 – 17.

5. Лащенников, Б.Я. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / Б.Я. Лащенников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.

6. Салитренник, В.Б. Колебания системы со смешанным неупругим сопротивлением / В.Б.Салитренник, В.Н. Гордеев // Гидромеханика и теория упругости. – Д., 1973. – Вып. 16. – С. 12 – 19.

7. Пановко, Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / Я.Г. Пановко. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.

8. Хромов, Е.В. Анализ точности метода гармонического баланса в задачах моделирования затухающих колебаний / Е.В. Хромов, О.В. Хромов // Надежность и долговечность механизмов, элементов конструкций и биомеханических систем: матер. Междунар. науч.-тех. конф. – Севастополь, 2009. – С. 163 – 166.

9. Сорокин, Е.С. Внутренние и внешние сопротивления при колебаниях твердых тел / Е.С. Сорокин. – М.: Изд-во ВНИИСА, 1957. – 64 с.

Надійшла до редакції 11.04. 2011

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ СО СМЕШАННЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Исследованы колебания системы с одной степенью свободы при совместном учете вязкого и внутреннего (комплексного) трения по Е.С. Сорокину. Найдены точные решения нелинейной задачи вынужденных колебаний в действительной области.

***Ключевые слова**: колебания, внутреннее трение, нелинейная задача.*

ON EXACT SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF OSCILLATION OF THE SYSTEM WITH ONE DEGREE OF FREEDOM WITH THE MIXED RESISTANCE

Oscillations of the system with one degree of freedom in a joint account viscous andinternal (integrated) friction E.S. Sorokin. Exact solutions of the nonlinear problem of forced oscillations in the real domain.

***Key words:** vibrations, internal friction, nonlinear problem.*