УДК 62-50

В.С. Ловейкін, д.т.н., проф., Ю.О. Ромасевич, к.т.н.

Національний університет біоресурсів і природокористування України

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РУХОМ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗА ІНТЕГРАЛЬНО-ТЕРМІНАЛЬНИМ КРИТЕРІЄМ

Приведено розв'язання задачі синтезу оптимального керування рухом динамічної системи за допомогою методу динамічного програмування. Синтезоване керування дозволяє задовольнити додаткові вимоги поставлені до перехідних режимів руху динамічних одномасових систем, які усувають „жорсткі" та „м'які" удари у кінематичних зачепленнях приводу системи.

Ключові слова: *оптимальне керування, динамічне програмування, інтегрально-термінальний критерій.*

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Однією із проблем керування рухом сучасних механізмів і машин є забезпечення мінімального значення критеріїв, які відображають небажані властивості руху системи і виражаються інтегральними функціоналами. Ці функціонали необхідно мінімізувати. У результаті можна отримати функцію оптимального керування у вигляді зворотного зв'язку. Характерною рисою такого оптимального керування є те, що початкове керування не задається апріорі. Це характеризує значну напруженість, у сенсі динаміки, перехідних процесів руху системи. Варто зазначити, що вибір початкового значення керування (якщо такий вибір можна здійснити) не забезпечує усунення „м'яких" ударів у кінематичних парах приводу динамічної системи. Для досягнення цієї вимоги необхідно поставити більш жорсткі вимоги, а саме: забезпечити нульову швидкість наростання функції керування на початку руху системи [1].

Крім вказаної проблеми є іще одна, не менш важлива: оскільки оптимальне керування є функцією фазових координат системи, то великі значення фазових координат викличуть значне по величині керування (момент на валу приводного двигуна). Необхідно забезпечити умову неперевищення величини керування, яка випливає із перевантажувальної здатності електроприводу та часострумової характеристики частотного перетворювача, який виступає джерелом живлення для приводного двигуна. Вирішення цієї задачі зводиться до мінімізації термінальних критеріїв.

Огляд останніх джерел досліджень і публікацій. У даному дослідженні буде синтезоване оптимальне керування, яке включає обмеження на величину керування і, крім того, мінімізує термінальні критерії початкового керування та швидкості зміни початкового керування. Серед відомих методів, які дозволяють знайти оптимальне керування із мінімізаціїю інтегральних та термінальних критеріїв, головне місце займає принцип максимуму [2]. Даний метод ґрунтується на максимізації функції Гамільтона з врахуванням обмежень на керування. Однак, принцип максимуму дозволяє знайти лише „якісну" картину оптимального керування. „Кількісні" характеристики, а саме моменти перемикання керування, необхідно знаходити використовуючи інші методи. Крім вказаних труднощів принцип максимуму у більшості випадків не дає змоги отримати керування у вигляді зворотного зв'язку, тобто оптимальне керування є програмним.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Одним із поширених методів, які дозволяють оптимізувати керування динамічною системою, є метод локальних варіацій [3], який відноситься до наближених методів. Метод можна використовувати як для синтезу програмного керування так і для керування у вигляді зворотного зв'язку. У останньому випадку цифрова система керування виконує відносно велику кількість обчислень у режимі реального часу. Крім того, метод локальних варіацій не забезпечує глобальний мінімум оптимізаційного функціоналу, досягається лише локальний мінімум, який залежить від першого наближення керування. Що стосується вибору такого наближення то він погано формалізований.

Не будемо зупинятись на інших наближених методах розв'язання оптимізаційних задач керування. Зазначимо лише, що кожен із цих методів має свої переваги та недоліки, які визначають клас задач, які розв'язуються з їх допомогою.

Постановка завдання. Метою дослідження є синтез оптимального керування одномасовою динамічною системою за критерієм, який враховує першу а другу похідну функції керування. Для досягнення поставленої мети ставляться такі задачі:

1) обґрунтувати оптимізаційний критерій та виконати математичну постановку задачі синтезу оптимального керування;

2) за допомогою методу динамічного програмування знайти функцію керування динамічною системою у вигляді зворотного зв'язку $u = u(x_2,\ x_1,\ x_0)$;

3) виконати аналіз отриманих результатів.

Виклад основного матеріалу дослідження.

1. Обґрунтування оптимізаційного критерію

Одним із найпоширеніших регуляторів, які використовуються у системах автоматики, є ПІД-регулятор [4]. Математично, даний тип регулятора виконує переведення фазової точки у початок координат. Поточні координати фазової точки визначаються величиною похибки керування об'єктом та першою похідною похибки за часом. Практично цей тип регулятора забезпечує усунення похибки керування об'єктом через деякий час. Усунення виконується за принципом зворотного зв'язку. Тобто кожному значенню координати фазової точки ставиться у відповідність певна величина керування. Отже даний тип керування можна використовувати для оптимального ПІД-регулювання об'єктів, які описуються диференціальним рівнянням другого порядку (рівняння динаміки руху об'єкта).

Якщо використати більш загальний критерій оптимізації, наприклад:

$$I_{комп.} = \int_0^T (k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 u^2 + k_4 \dot{u}^2 + k_5 \ddot{u}^2)dt, \tag{1}$$

де x_1 - узагальнена координата одно масової динамічної системи; x_2 - перша похідна узагальненої координати по часу ($x_2 = \frac{dx_1}{dt}$); u - функція керування динамічною системою ($u = \frac{F - W}{m}$, де F - приводне зусилля, W - сила опору переміщення системи, m - приведена до поступального руху маса системи), то у якості функції керування, за якою буде проводитись оптимізація величини критерію $I_{комп.}$ необхідно прийняти $\ddot{u}$. Таким чином:

$$\ddot{u} = f(\dot{u},\ u,\ \ x_2,\ x_1). \tag{2}$$

Для того, щоб знайти функцію u необхідно двічі проінтегрувати рівняння (2). У результаті ми отримаємо

$$u = u(x_2,\ x_1,\ x_0,\ x_{00}), \tag{3}$$

де $x_{00} = \iint x_1 dtdt$.

Такий тип регулювання, яке включає диференціальну, пропорціональну, інтегральну та подвійну інтегральну складову величини похибки задання координати механічної системи є нестандартним і нереалізованим у більшості прикладних розробок (мікроконтролерні ПІД-регулятори). Крім того, як відомо, значна вага інтегральної складової у ПІД-регуляторі призводить до нестійкості системи автоматичного регулювання. Можна очікувати, що подвійна інтегральна сладова привнесе у систему регулювання ще більшу нестійкість. Назвемо ще один недолік критерію (1). Можна показати, що процедура мінімізації цього критерію за допомогою методу динамічного програмування зводиться до розв'язування алгебраїчного рівняння восьмого степеня, яке, як відомо, не має розв'язку у радикалах. Доводиться шукати його розв'язок чисельними методами, що пов'язане із заданням початкового наближення. Оскільки апріорі невідомо, яке початкове наближення необхідно взяти, то чисельний розв'язок рівняння може бути дійсним, комплексним або уявним. Це ускладнює процес знаходження одного лише дійсного кореня, при якому система оптимального регулювання є асимптотично стійкою.

Отже, доцільно розв'язувати таку оптимізаційну задачу: знайти мінімум критерію оптимізації:

$$I_{комп.2} = \int_0^T (k_2 x_2^2 + k_3 u^2 + k_4 \dot{u}^2 + k_5 \ddot{u}^2)dt, \tag{4}$$

при крайових умовах:

$$\begin{cases} x_1(0) = s_0,\ x_2(0) = v_0,\ u(0) = u_0,\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0; \\ x_1(T) = x_2(T) = u(T) = \dot{u}(T) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Мінімізація критерію (4) дає змогу отримати ПІД-регулятор із оптимальними коефіцієнтами підсилення окремих складових похибки задання.

Відзначимо також, що крайові умови (5) накладають більш жорсткі умови на клас функцій, серед яких шукається оптимальна. Однак це є виправданим, оскільки цей клас функцій доставляє абсолютні мінімуми таким термінальним критеріям:

$$\begin{cases} u^2(0) \to \min, \\ \dot{u}^2(0) \to \min, \\ u^2(T) \to \min, \\ \dot{u}^2(T) \to \min. \end{cases} \tag{6}$$

Система (6) фізично означає усунення „жорстких" та „м'яких" ударів у приводному механізмі механічної системи на початку та у кінці руху.

2. Методика синтезу оптимального керування у вигляді зворотного зв'язку

Для розв'язання задачі (4)-(6) використаємо динамічне програмування [5]. Основне функціональне рівняння Беллмана для критерію (4) має такий вигляд:

$$\min\left[k_1 x_2^2 + k_2 u^2 + k_3 \varphi^2 + k_4 \gamma^2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u + \frac{\partial S}{\partial u} \varphi + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \gamma \right] = 0, \tag{10}$$

де S - функція Беллмана φ - перша похідна функції u за часом; γ - друга похідна функції u за часом.

Мінімум правої частини рівняння (10) будемо шукати по параметру γ для чого продиференціюємо його за γ та прирівняємо отримане до нуля:

$$2k_4\gamma + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0. \qquad (11)$$

Знайдемо з рівняння (11) керування:

$$\gamma = -\frac{1}{2k_4}\frac{\partial S}{\partial \varphi} \qquad (12)$$

та підставимо отримане у рівняння (9) в результаті чого будемо мати:

$$x_2(k_1 x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_1}) + u(k_2 u + \frac{\partial S}{\partial x_2}) + \varphi(k_3\varphi + \frac{\partial S}{\partial u}) - \frac{1}{4k_4}(\frac{\partial S}{\partial \varphi})^2 = 0. \qquad (13)$$

Рівняння (13) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати розв'язок рівняння (13) у вигляді квадратичної форми:

$$S = A_1 x_2^2 + A_2 u^2 + A_3 \varphi^2 + A_4 x_2 u + A_5 x_2 \varphi + A_6 u\varphi. \qquad (14)$$

Ми використаємо метод розв'язування рівняння (13) запропонований академіком А.М. Летовим [6]. Візьмемо частинні похідні з виразу (14) за параметрами x_2, u, φ:

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = A_5\varphi + 2A_1 x_2 + A_4 u, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial S}{\partial u} = A_6\varphi + A_4 x_2 + 2A_2 u, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = 2A_3\varphi + A_5 x_2 + A_6 u. \qquad (17)$$

Підставимо вирази (15)-(17) у рівняння (13) і отримаємо:

$$\begin{aligned}&\varphi^2(A_6 + k_3 - \frac{A_3^2}{k_4}) + \varphi u(2A_2 + A_5 - \frac{A_3 A_6}{k_4}) + u^2(A_4 + k_2 - \frac{A_6^2}{4k_4}) + \\ &+\varphi x_2(A_4 - \frac{A_3 A_5}{k_4}) + u x_2(2A_1 - \frac{A_6 A_5}{k_4}) + x_2^2(k_1 - \frac{A_5^2}{4k_4}) = 0.\end{aligned} \qquad (18)$$

Рівняння (18) буде справедливим для будь-яких значень змінних x_2 u та φ лише за умови, що вирази у дужках рівні нулю. Це дає змогу сформувати систему з шести алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A_i $(i = 1, 2, ..., 6)$.

Оскільки функція γ залежить лише від трьох невідомих коефіцієнтів:

$$\gamma = -\frac{1}{2k_4}(2A_3\varphi + A_5 x_2 + A_6 u). \qquad (19)$$

то необхідно шукати лише невідомі коефіцієнти A_3, A_5, A_6.

Опустивши проміжні перетворення та викладки, можемо, знайти оптимальні значення невідомих коефіцієнтів, які надають системі асимптотичну стійкість. Не будемо записувати їх формули, оскільки вони мають значний об'єм.

Рівняння (19) можемо записати у дещо іншому вигляді:

$$\ddot{u} = -\frac{1}{2k_4}(2A_3\dot{u} + A_5 x_2 + A_6 u). \qquad (19a)$$

Із даного рівняння необхідно отримати функцію u. Для цього необхідно двічі про інтегрувати рівняння (19а). У результаті будемо мати:

ё

$$u=-\frac{1}{k_4}\left(A_3\iint \ddot{u}dt+\frac{A_6}{2}\iint udt+\frac{A_5}{2}\iint x_2dt\right)+C_1t+C_2= \\ =-\frac{1}{k_4}\left(A_3x_2+\frac{A_6}{2}x_1+\frac{A_5}{2}x_0\right)+C_1t+C_2, \tag{20}$$

де $x_0=\int x_1dt$; C_1 та C_2 - постійні інтегрування.

Постійні інтегрування можна знайти використовуючи початкові умови руху динамічної системи (5). Запишемо їх значення:

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{A_6v_0+2\dot{u}_0k_4+2A_3u_0+A_5s_0}{2k_4}, \\ C_2=\dfrac{2A_3v_0+A_5x_0(0)+2k_5u_0+A_6s_0}{2k_4}. \end{cases} \tag{21}$$

Підставляючи отримані значення постійних інтегрування у вираз (20) остаточно запишемо вираз для оптимального керування:

$$u=(\dot{u}_0t+u_0)+\frac{A_3}{k_4}(v_0+u_0t-x_2)+\frac{A_6}{k_4}(s_0+v_0t-x_1)+\frac{A_5}{k_4}(x_0(0)+s_0t-x_0). \tag{22}$$

Функція керування $u=u(x_2,\ x_1,\ x_0)$ знайдена.

3. Аналіз результатів

Аналізуючи вираз (22) можемо сказати, з'являється можливість задавати початкове значення оптимального керування, не залежне від початкових значень фазових координат системи. Крім того, аналогічне твердження можна висловити про першу похідну функції керування за часом. Зазначимо, що керування (22) доставляє мінімуми термінальним критеріям (6), що збільшує плавність переходу руху динамічної системи із перехідного режиму на усталений і навпаки.

Приведемо фазовий портрет системи та графік зміни оптимального керування (рисунок 1)

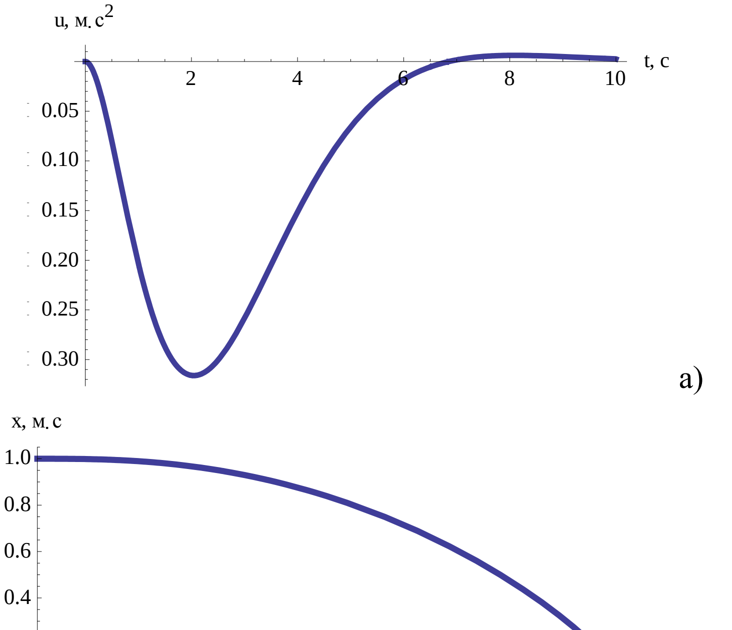

Рисунок 1 – Графіки керування динамічною системою (а) та відповідні їм фазові портрети (б)

Узагальнюючи, можна сказати, що постановка більш складних оптимізаційних задач, які б враховували третю та вищі похідні функції керування, призводить до можливості формувати оптимальне керування за додатковими вимогами, накладеними на рух динамічної системи.

Висновки

1. Синтезовано оптимальний ПІД-регулятор, здатний забезпечити додаткові вимоги до руху динамічної одно масової системи: нульові значення початкового керування та його першої похідної за часом.

2. Отримані результати можуть бути використані для налаштування коефіцієнтів підсилення відповідних складових похибки задання у системах автоматичного регулювання, які використовуються для динамічних систем, що описуються диференціальними рівняннями другого порядку.

Література

1. Ключев, В.И. Теория электропривода. М.: Энергоатомиздат, 2001. – 704 с.

2. Понтрягин, Л.С., Болтнянский, В.Г., Гамкрелидзе, Р.В., Мищенко, Е.Ф. Математическая теория оптимальних процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.

3. Черноусько, Ф.Л., Баничук, Б.В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. – 236 с.

4. Воронов, А.А., Титов, В.К., Новоградов, Б.Н. Основы теории автоматического управления и регулирования. - М.: Высшая школа, 1977. – 519 с.

5. Беллман, Р. Динамическое программирование. – под. ред. Воробьева Н.Н. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.

6. Летов, А.М. Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981. – 255 с.

Надійшла до редакції 27.10.2012

В.С. Ловейкин, д.т.н., проф., Ю.О. Ромасевич, к.т.н.

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ИНТЕГРАЛЬНО-ТЕРМИНАЛЬНОМУ КРИТЕРИЮ

Приведено решение задачи синтеза оптимального управления движением динамической системы с помощью метода динамического программирования. Синтезированное управление позволяет удовлетворить дополнительные требования поставленные к переходным режимам движения динамических одномассовых систем, которые устраняют „жесткие" и „мягкие" удары в кинематических зацеплениях привода системы.

Ключевые слова: *оптимальное управление, динамическое программирование, интегрально-терминальный критерий.*

V.S.Lovejkin, Ph.D., J.O.Romasevich, Ph.D.

National university of bioresources and wildlife management of Ukraine

SYNTHESIS OF OPTIMUM CONTROL BY MOVEMENT OF DYNAMIC SYSTEMS BY INTEGRAL-TERMINAL CRITERION

The decision of a problem of synthesis of optimum control by movement of dynamic system by means of a method of dynamic programming is resulted. The synthesized management allows to satisfy additional requirements the movements of dynamic one-mass systems put to transitive modes which eliminate „hard” and „soft” blows in kinematic gearings of a system's drive.

Key words: *optimum control, dynamic programming, integral-terminal criterion.*