

*Л.В. Нуждин, к.т.н., профессор, заведующий кафедрой  
Новосибирский государственный  
архитектурно-строительный университет (Сибстрин)*

## **УЧЕТ СЛОИСТОГО ЗАЛЕГАНИЯ ГРУНТОВ В ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ СВАЙНЫХ ФУНДАМЕНТОВ ПО ВОЛНОВЫМ МОДЕЛЯМ**

*Рассмотрены аналитические зависимости для расчета параметров жесткости и демпфирования свайного основания при погружении свай в слоистые грунты. Проведено сравнение полученных результатов с однородным основанием.*

**Ключевые слова:** *колебания свайного фундамента, волновые модели, параметры жесткости и демпфирования, слоистое упругое полупространство.*

*Л.В. Нуждин, к.т.н., профессор, завідувач кафедри  
Новосибірський державний архітектурно-будівельний університет (Сибстрин)*

## **УРАХУВАННЯ ШАРУВАТОГО ЗАЛЯГАННЯ ҐРУНТІВ У ДИНАМІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ ПАЛЬОВИХ ФУНДАМЕНТІВ ЗА ХВИЛЬОВИМИ МОДЕЛЯМИ**

*Розглянуто аналітичні залежності для розрахунку параметрів жорсткості й демпфування пальової основи при зануренні паль у шаруваті ґрунти. Виконано порівняння отриманих результатів з однорідною основою.*

**Ключові слова:** *коливання пального фундаменту, хвильові моделі, параметри жорсткості та демпфування, шаруватий пружний півпростір.*

*L.V. Nuzhdin, Ph.D., Professor, Head of Department  
Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)*

## **ACCOUNTING FOR STRATIFIED SOILS IN THE DYNAMIC CALCULATION OF PILE FOUNDATIONS IN THE WAVE MODELS**

*Considered analytical dependences to calculate the stiffness and damping parameters of pile bases for piles in stratified soil. Comparisons of the results with a homogeneous base are shown.*

**Keywords:** *vibrations of pile foundations, wave models, parameters of stiffness and damping, layered elastic halfspace.*

**Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными практическими заданиями.** Опыт проектирования, обследования и реконструкции свайных фундаментов, эксплуатирующихся в условиях динамического нагружения, специальные экспериментальные исследования свидетельствуют о преимуществах использования волновых моделей для расчетов колебаний фундаментов. Учитывая практически линейный характер колебаний фундаментов от большинства промышленных, транспортных и других техногенных источников, грунтовое основание обычно моделируется упругим однородным изотропным полупространством со средневзвешенными характеристиками. Если для малозаглубленных фундаментов на естественном основании это, как правило, допустимо, то для свайных фундаментов неучет неоднородности сложения основания является некорректным. В реальных условиях, в пределах глубины погружения сваи почти всегда можно выделить несколько слоев грунта, обладающих различными и часто сильно отличающимися характеристиками.

**Анализ последних исследований и публикаций, в которых положено начало решению данной проблемы.** М.И. Забылин [1] и Н.С. Ракивненко [2] в своих исследованиях эффект углубления рассматривали с позиции модели упругого на полупространства. В силу принципа суперпозиции реакции на фундамент определяют раздельно. Каждая реакция, в том числе и динамическая, будет состоять из упругой и демпфирующих составляющих. М.Л. Холмянским [3] рекомендован следующий способ учета углубления. Коэффициенты жесткости оснований незаглубленных фундаментов  $K_{z0}$ ,  $K_{\varphi 0}$ ,  $K_{x0}$ , определяют известным способом, а углубленных  $K_z$ ,  $K_\varphi$ ,  $K_x$  – по формулам  $K_z = K_{z0}R_z$ ,  $K_\varphi = K_{\varphi 0}R_\varphi$ ,  $K_x = K_{x0}R_x$ . Он также предлагает коэффициент жесткости при вращающихся колебаниях [3].

**Выделение не решенных ранее частей общей проблемы, которым посвящена статья.** Неоднородность грунтового основания удобно учитывать при определении динамических параметров жесткости и демпфирования свайного фундамента. В общем случае они находятся суммированием соответствующих значений для заглубленного ростверка и каждой отдельной сваи в кусте.

**Целью статьи** является представление аналитических зависимостей для расчета параметров жесткости и демпфирования свайного основания при погружении свай в слоистых грунтах.

**Основной материал и результаты исследований.** Для свайного фундамента обычной конструкции из-за отсутствия надежного контакта подошвы ростверка с грунтом в межсвайном пространстве параметры жесткости и демпфирования ростверка определяются только взаимодействием его боковых граней с окружающим грунтом. Здесь в расчетах следует задаваться характеристиками грунта обратной засыпки пазух. Параметры жесткости и демпфирования одиночной сваи находятся из рассмотрения ее поперечных и продольных колебаний в слоистой грунтовой среде.

Расчетные схемы одиночной сваи показаны на рисунках 1 и 2. Свая моделируется гибким вертикальным цилиндрическим стержнем, не теряющим в процессе колебаний контакта с грунтом. Грунт – вязкоупругая среда, ниже конца сваи рассматривается как полупространство, а выше – как слоистая структура, состоящая из одного, двух, трех или четырех слоев (инженерно-геологических элементов – ИГЭ) в зависимости от реальных инженерно-геологических условий. Каждый слой (ИГЭ), в свою очередь, представляет собой совокупность бесконечно тонких независимых грунтовых пластин, по которым в горизонтальном направлении распространяются упругие волны. Поперечные и продольные колебания стержня анализируем отдельно.

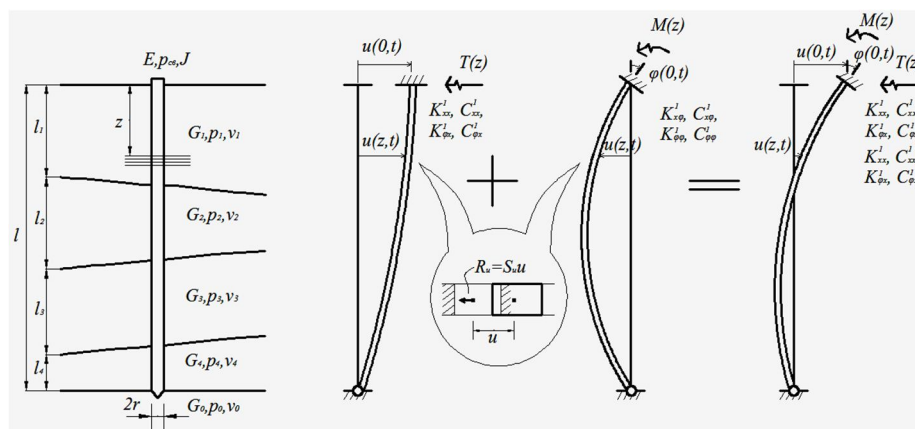


Рисунок 1 – Расчетная схема одиночной сваи в слоистом основании при сдвиго-вращательных колебаниях

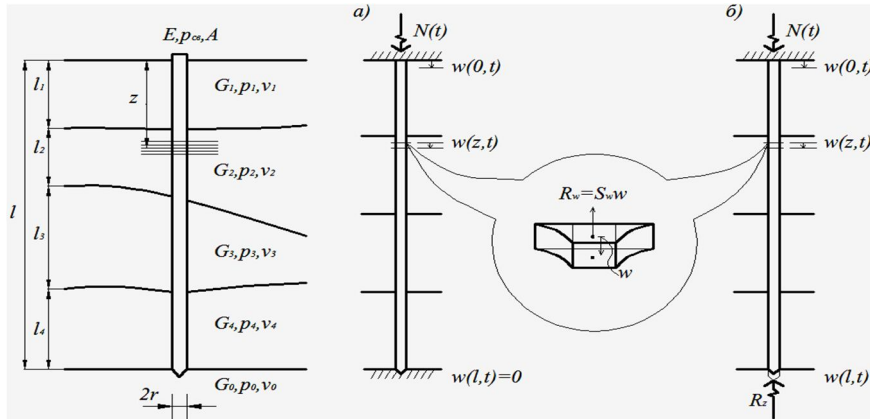


Рисунок 2 – Расчетная схема одиночной сваи в слоистом основании при вертикальных колебаниях: а) свая-стойка; б) висячая свая

Связь между перемещениями стержня и реакциями среды по его боковой поверхности определяется из рассмотрения задачи о колебаниях пластины с твердым цилиндрическим включением («недеформируемым круглым вырезом»). При поперечных колебаниях возможные депланационные перемещения пластин в случае поворота поперечных сечений стержня не учитываем.

Неоднородность слоения грунтов наибольшее влияние оказывает на горизонтальные и сдвиго-вращательные колебания свайного фундамента. Для получения необходимых составляющих параметров жесткости и демпфирования сваи рассмотрим поперечные колебания стержня. Их дифференциальное уравнение имеет вид

$$EI \frac{\partial^4 u(z,t)}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + S_u u(z,t) = 0, \quad (1)$$

где  $E$ ,  $c$ ,  $I$ ,  $\bar{m}$  – соответственно модуль упругости, коэффициент демпфирования материала, момент инерции поперечного сечения и масса единицы длины сваи.

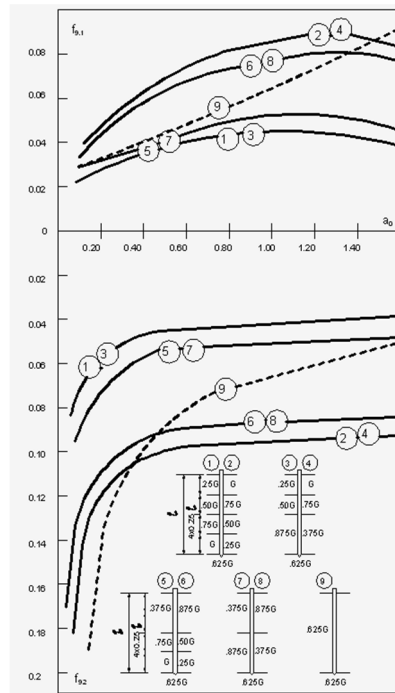


Рисунок 3 – Графики функций жесткости  $f_{9,1}$  и демпфирования  $f_{9,2}$  одиночной сваи в зависимости от безразмерной частоты колебаний  $a_0$  и учета слоистости грунтового основания

Сопротивление среды перемещениям стержня принимаем по зависимостям, полученным из рассмотрения задачи о вынужденных колебаниях заглубленного фундамента [4]:

$$S_u = G(S_{u1} + iS_{u2}) = 2\pi G a_0 \frac{(1|s)H_2^{(2)}(a_0)H_1^{(2)}(a_0\sqrt{2}) + H_1^{(2)}(a_0)H_2^{(2)}(a_0\sqrt{2})}{H_0^{(2)}(a_0)H_2^{(2)}(a_0\sqrt{2}) + H_0^{(2)}(a_0\sqrt{2})H_2^{(2)}(a_0)},$$

$$s = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)};$$

при  $\nu = 0,5$

$$S_{u1} = \pi a_0^2 \left[ 1 + 2 \frac{J_0(a_0)J_2(a_0) + Y_0(a_0)Y_2(a_0)}{J_0^2(a_0) + Y_0^2(a_0)} \right], \quad S_{u2} = \frac{8}{J_0^2(a_0)},$$

в которых  $G$ ,  $\nu$  – модуль сдвига и коэффициент Пуассона грунта;  $a_0$  – безразмерная частота колебаний;  $H_0^{(2)}$ ,  $H_2^{(2)}$  – функции Ганкеля второго рода нулевого и второго порядка;  $J_0$ ,  $J_2$ ,  $Y_0$ ,  $Y_2$  – функции Бесселя первого и второго рода нулевого и второго порядка.

$$(l/r = 60, V_s/V_{св} = 0,03, \rho_1/\rho_{св} = 0,7, \rho_1/\rho_{2,3,4} = 1,0, \nu = 0,25).$$

Полагая  $u(z, t) = u(z)e^{i\omega t}$ , формулу (1) преобразуем к виду

$$EI \frac{\partial^4 u(z)}{\partial z^4} + [GS_{u1} - \bar{m}\omega^2 + i(c\omega + GS_{u2})]u(z) = 0. \quad (3)$$

Общим решением (3) будет

$$u(z) = c_1 \operatorname{ch} \frac{\lambda}{l} z + c_2 \operatorname{sh} \frac{\lambda}{l} z + c_3 \cos \frac{\lambda}{l} z + c_4 \sin \frac{\lambda}{l} z. \quad (4)$$

Здесь  $l$  – длина сваи;  $\lambda$  – комплексный параметр частоты, включающий сопротивление грунта, который был предложен [5].

$$\lambda = l^4 \sqrt[4]{(\bar{m}\omega^2 - GS_{u1} - i(c\omega + GS_{u2}))} / EI \approx l^4 \sqrt[4]{(\bar{m}\omega^2 - GS_{u1} - iGS_{u2})} / EI \quad (5)$$

С учетом обозначений

$$\lambda_0 = l^4 \sqrt[4]{\bar{m}\omega^2 / EI}; \quad L_u = \frac{l^4 G}{EI}; \quad a_u = \lambda_0^4 - L_u S_{u1}; \quad b_u = \lambda_0^4 - L_u \left( \frac{c\omega}{G} - S_{u2} \right); \quad (6)$$

$$R_u = \sqrt{a_u^2 + b_u^2}; \quad \operatorname{tg} \psi_u = b_u / a_u,$$

можно записать

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2; \quad \lambda_1 = \sqrt[4]{R_u} \cos \frac{\psi_u}{4}; \quad \lambda_2 = \sqrt[4]{R_u} \sin \frac{\psi_u}{4}. \quad (7)$$

Влияние слоев на колебания стержня рассматриваем отдельно [6]. Если обозначить для каждого слоя соответственно  $l_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $c_{1,1}$ ,  $c_{2,1}$ ,  $c_{3,1}$ ,  $c_{4,1}$ ; ...  $l_4$ ,  $\lambda_4$ ,  $c_{1,4}$ ,  $c_{2,4}$ ,  $c_{3,4}$ ,  $c_{4,4}$ , то общее решение (4) запишется как система

$$\begin{cases} u_1(z) = c_{1,1} \operatorname{ch} \frac{\lambda_1}{l_1} z + c_{2,1} \operatorname{sh} \frac{\lambda_1}{l_1} z + c_{3,1} \cos \frac{\lambda_1}{l_1} z + c_{4,1} \sin \frac{\lambda_1}{l_1} z; \\ u_2(z) = c_{1,2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_2}{l_2} z + c_{2,2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_2}{l_2} z + c_{3,2} \cos \frac{\lambda_2}{l_2} z + c_{4,2} \sin \frac{\lambda_2}{l_2} z; \\ u_3(z) = c_{1,3} \operatorname{ch} \frac{\lambda_3}{l_3} z + c_{2,3} \operatorname{sh} \frac{\lambda_3}{l_3} z + c_{3,3} \cos \frac{\lambda_3}{l_3} z + c_{4,3} \sin \frac{\lambda_3}{l_3} z; \\ u_4(z) = c_{1,4} \operatorname{ch} \frac{\lambda_4}{l_4} z + c_{2,4} \operatorname{sh} \frac{\lambda_4}{l_4} z + c_{3,4} \cos \frac{\lambda_4}{l_4} z + c_{4,4} \sin \frac{\lambda_4}{l_4} z. \end{cases} \quad (8)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  находятся (5) при подстановке соответствующих значений  $l, G, \rho, V$ . Учитывая круглое поперечное сечение стержня и выразив свойства материалов через скорости распространения волн, определяемые, например в работе [7], можно переписать через безразмерные параметры как например (6),

$$\lambda_{oi} = \frac{l_i}{r} \sqrt{2 \frac{V_{si}}{V_{св}}} \sqrt{a_{oi}}; \quad L_{ui} = \frac{4}{\pi} \frac{\rho_i}{\rho_{св}} \left( \frac{V_{si}}{V_{св}} \right)^2 \left( \frac{L_i}{r} \right)^4, \quad (9)$$

где  $V_{si} = \sqrt{G_i/\rho_i}$  – скорость сдвиговых волн в грунте;  $V_{св} = \sqrt{E_{св}/\rho_{св}}$  – скорость продольной волны в свае;  $i$  – порядковый номер слоя грунта.

Для получения выражения поперечных колебаний верхнего конца стержня необходимо исключить  $c_{1,2}, c_{2,2}, c_{3,2}, c_{4,2}; \dots c_{1,4}, c_{2,4}, c_{3,4}, c_{4,4}$  и определить  $c_{1,1}, c_{2,1}, c_{3,1}, c_{4,1}$  с учетом влияния нижележащих слоев. Для этого составим систему уравнений, включающую в себя граничные условия на верхнем и нижнем концах стержня (по 2 уравнения) и условия сопряжения на границах слоев – равенство перемещений  $u(z)$  и углов поворота  $\varphi(z)$  стержня, а также изгибающих моментов  $M(z)$  и поперечных сил  $T(z)$  в стержне (по 4 уравнения на каждое сопряжение).

В качестве граничных условий рассматриваются способы закрепления концов стержня. Для верхнего конца они соответствуют реальной конструкции сопряжения сваи с ростверком, внизу приняты на основании ранее выполненного численного анализа. Для традиционных конструкций свайных фундаментов – это жесткая заделка сверху и шарнирное опирание нижнего конца стержня.

Таким образом, например, при наличии четырех слоев в пределах глубины погружения сваи система будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{1,1} + c_{3,1} = u(0); \\ c_{2,1} + c_{4,1} = \varphi(0); \\ c_{1,1} \operatorname{ch} \lambda_1 + c_{2,1} \operatorname{sh} \lambda_1 + c_{3,1} \cos \lambda_1 + c_{4,1} \sin \lambda_1 = c_{1,2} + c_{3,2}; \\ (c_{1,1} \operatorname{sh} \lambda_1 + c_{2,1} \operatorname{ch} \lambda_1 - c_{3,1} \sin \lambda_1 + c_{4,1} \cos \lambda_1) \lambda_1 / l_1 = (c_{2,2} + c_{4,2}) \lambda_2 / l_2; \\ (c_{1,1} \operatorname{ch} \lambda_1 + c_{2,1} \operatorname{sh} \lambda_1 - c_{3,1} \cos \lambda_1 - c_{4,1} \sin \lambda_1) \lambda_1^2 / l_1^2 = (c_{1,2} - c_{3,2}) \lambda_2^2 / l_2^2; \\ (c_{1,1} \operatorname{sh} \lambda_1 + c_{2,1} \operatorname{ch} \lambda_1 + c_{3,1} \sin \lambda_1 - c_{4,1} \cos \lambda_1) \lambda_1^3 / l_1^3 = (c_{2,2} - c_{4,2}) \lambda_2^3 / l_2^3; \\ c_{1,2} \operatorname{ch} \lambda_2 + c_{2,2} \operatorname{sh} \lambda_2 + c_{3,2} \cos \lambda_2 + c_{4,2} \sin \lambda_2 = c_{1,3} + c_{3,3}; \\ (c_{1,2} \operatorname{sh} \lambda_2 + c_{2,2} \operatorname{ch} \lambda_2 - c_{3,2} \sin \lambda_2 + c_{4,2} \cos \lambda_2) \lambda_2 / l_2 = (c_{2,3} + c_{4,3}) \lambda_3 / l_3; \\ (c_{1,2} \operatorname{ch} \lambda_2 + c_{2,2} \operatorname{sh} \lambda_2 - c_{3,2} \cos \lambda_2 - c_{4,2} \sin \lambda_2) \lambda_2^2 / l_2^2 = (c_{1,3} - c_{3,3}) \lambda_3^2 / l_3^2; \\ (c_{1,2} \operatorname{sh} \lambda_2 + c_{2,2} \operatorname{ch} \lambda_2 + c_{3,2} \sin \lambda_2 - c_{4,2} \cos \lambda_2) \lambda_2^3 / l_2^3 = (c_{2,3} - c_{4,3}) \lambda_3^3 / l_3^3; \\ c_{1,3} \operatorname{ch} \lambda_3 + c_{2,3} \operatorname{sh} \lambda_3 + c_{3,3} \cos \lambda_3 + c_{4,3} \sin \lambda_3 = c_{1,4} + c_{3,4}; \\ (c_{1,3} \operatorname{sh} \lambda_3 + c_{2,3} \operatorname{ch} \lambda_3 - c_{3,3} \sin \lambda_3 + c_{4,3} \cos \lambda_3) \lambda_3 / l_3 = (c_{2,4} + c_{4,4}) \lambda_4 / l_4; \\ (c_{1,3} \operatorname{ch} \lambda_3 + c_{2,3} \operatorname{sh} \lambda_3 - c_{3,3} \cos \lambda_3 - c_{4,3} \sin \lambda_3) \lambda_3^2 / l_3^2 = (c_{1,4} - c_{3,4}) \lambda_4^2 / l_4^2; \\ (c_{1,3} \operatorname{sh} \lambda_3 + c_{2,3} \operatorname{ch} \lambda_3 + c_{3,3} \sin \lambda_3 - c_{4,3} \cos \lambda_3) \lambda_3^3 / l_3^3 = (c_{2,4} - c_{4,4}) \lambda_4^3 / l_4^3; \\ c_{1,4} \operatorname{ch} \lambda_4 + c_{2,4} \operatorname{sh} \lambda_4 + c_{3,4} \cos \lambda_4 + c_{4,4} \sin \lambda_4 = 0; \\ c_{1,4} \operatorname{ch} \lambda_4 + c_{2,4} \operatorname{sh} \lambda_4 - c_{3,4} \cos \lambda_4 - c_{4,4} \sin \lambda_4 = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Задаваясь единичным горизонтальным перемещением  $u(0) = 1$ , из выражений изгибающего момента  $M(z) = -EI d^2 u(z) / dz^2$  и поперечной силы  $T(z) = -EI d^3 u(z) / dz^3$ ,

приложенных к голове сваи, определяем соответственно параметры  $K_{\varphi x}^1$ ,  $C_{\varphi x}^1$  и  $K_{xx}^1$ ,  $C_{xx}^1$ . Рассматривая единичный поворот верхнего конца стержня  $\varphi(0)=1$ , из анализа  $M(z)$  и  $T(z)$  находим  $K_{\varphi\varphi}^1$ ,  $C_{\varphi\varphi}^1$  и  $K_{x\varphi}^1$ ,  $C_{x\varphi}^1$ .

После преобразований, с учетом однообразия обозначений с параметрами сваи в однородном грунте, расчетные формулы для параметров жесткости и демпфирования сдвиго-вращательных колебаний одиночной сваи имеют вид

$$\begin{aligned}
 K_{xx}^1 &= \frac{EI}{r^3} f_{11.1}^{(2,3,4)}; & C_{xx}^1 &= \frac{EI}{r^2 V_{s1}} f_{11.2}^{(2,3,4)}; & K_{x\varphi}^1 &= \frac{EI}{r^3} f_{20.1}^{(2,3,4)}; \\
 C_{x\varphi}^1 &= \frac{EI}{r^2 V_{s1}} f_{20.2}^{(2,3,4)}; & K_{\varphi x}^1 &= \frac{EI}{r^2} f_{9.1}^{(2,3,4)}; & C_{\varphi x}^1 &= \frac{EI}{r V_{s1}} f_{9.2}^{(2,3,4)}; \\
 K_{\varphi\varphi}^1 &= \frac{EI}{r^2} f_{7.1}^{(2,3,4)}; & C_{\varphi\varphi}^1 &= \frac{EI}{r V_{s1}} f_{7.2}^{(2,3,4)}; & & \\
 f_{11.1}^{(2,3,4)} &= \frac{F_{11.1}^{(2,3,4)}(\lambda)}{(l_1/r)^3}; & f_{11.2}^{(2,3,4)} &= \frac{F_{11.2}^{(2,3,4)}(\lambda)}{a_0(l_1/r)^3}; \\
 f_{20.1}^{(2,3,4)} &= \frac{F_{20.1}^{(2,3,4)}(\lambda)}{(l_1/r)^3}; & f_{20.2}^{(2,3,4)} &= \frac{F_{20.2}^{(2,3,4)}(\lambda)}{a_0(l_1/r)^3}; \\
 f_{9.1}^{(2,3,4)} &= \frac{F_{9.1}^{(2,3,4)}(\lambda)}{a_0(l_1/r)^2}; & f_{9.2}^{(2,3,4)} &= \frac{F_{9.2}^{(2,3,4)}(\lambda)}{a_0(l_1/r)^2}; \\
 f_{7.1}^{(2,3,4)} &= \frac{F_{7.1}^{(2,3,4)}(\lambda)}{a_0(l_1/r)^2}; & f_{7.2}^{(2,3,4)} &= \frac{F_{7.2}^{(2,3,4)}(\lambda)}{a_0(l_1/r)^2}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Функциям комплексного переменного  $F_k(\lambda) = F_{k.1}(\lambda) + iF_{k.2}(\lambda)$  присвоены номера  $k$ , совпадающие с выражениями для колеблющихся стержней при аналогичном закреплении концов [9]. Но в отличие от простых функций [9] они представлены через комплексные параметры  $a_i$  в удобном для компьютерного анализа виде. Для пятислойного основания (при наличии четырех слоев в пределах глубины погружения сваи)

$$\begin{aligned}
 F_{11}^{(4)}(\lambda) &= -\lambda_1^3 2a_{50}/a_{51}; & F_{20}^{(4)}(\lambda) &= -\lambda_1^3 2a_{50}^1/a_{51}; \\
 F_9^{(4)}(\lambda) &= -\lambda_1^2 [1 + 2(a_{47}a_{51} - a_{49}a_{50})/a_{48}a_{51}]; & & \\
 F_7^{(4)}(\lambda) &= -\lambda_1^2 [1 + 2(a_{47}^1a_{51} - a_{49}a_{50}^1)/a_{48}a_{51}]. & & \\
 a_1 &= (1 + k_{1.2}^2) \operatorname{ch} \lambda_1; & a_1^1 &= (1 + k_{1.2}^2) \operatorname{sh} \lambda_1; & a_2 &= (1 - k_{1.2}^2) \cos \lambda_1 - (1 + k_{1.2}^2) \operatorname{ch} \lambda_1; \\
 a_3 &= (1 - k_{1.2}^2) \sin \lambda_1 - (1 + k_{1.2}^2) \operatorname{sh} \lambda_1; & a_4 &= k_{1.2}(1 + k_{1.2}^2) \operatorname{sh} \lambda_1; \\
 a_4^1 &= k_{1.2}(1 + k_{1.2}^2) \operatorname{ch} \lambda_1; & a_5 &= -k_{1.2}(1 - k_{1.2}^2) \sin \lambda_1 - k_{1.2}(1 + k_{1.2}^2) \operatorname{sh} \lambda_1; \\
 a_6 &= k_{1.2}(1 - k_{1.2}^2) \cos \lambda_1 - k_{1.2}(1 + k_{1.2}^2) \operatorname{ch} \lambda_1; \\
 a_7 &= (1 - k_{1.2}^2) \operatorname{ch} \lambda_1; & a_7^1 &= (1 - k_{1.2}^2) \operatorname{sh} \lambda_1; & a_8 &= (1 + k_{1.2}^2) \cos \lambda_1 - (1 - k_{1.2}^2) \operatorname{ch} \lambda_1; \\
 a_9 &= (1 + k_{1.2}^2) \sin \lambda_1 - (1 - k_{1.2}^2) \operatorname{sh} \lambda_1; & a_{10} &= k_{1.2}(1 - k_{1.2}^2) \operatorname{sh} \lambda_1; \\
 a_{10}^1 &= k_{1.2}(1 - k_{1.2}^2) \operatorname{ch} \lambda_1; & a_{11} &= -k_{1.2}(1 + k_{1.2}^2) \sin \lambda_1 - k_{1.2}(1 - k_{1.2}^2) \operatorname{sh} \lambda_1; \\
 a_{12} &= k_{1.2}(1 + k_{1.2}^2) \cos \lambda_1 - k_{1.2}(1 - k_{1.2}^2) \operatorname{ch} \lambda_1; & a_{13}^{[1]} &= a_1^{[1]} \operatorname{ch} \lambda_2 + a_4^{[1]} \operatorname{sh} \lambda_2;
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$a_{14} = a_2 \operatorname{ch} \lambda_2 + a_5 \operatorname{sh} \lambda_2; \quad a_{15} = a_3 \operatorname{ch} \lambda_2 + a_6 \operatorname{sh} \lambda_2;$$

$$a_{16}^{[1]} = a_7^{[1]} \cos \lambda_2 + a_{10}^{[1]} \sin \lambda_2 - (a_8 \cos \lambda_2 + a_{11} \sin \lambda_2) a_{13}^{[1]} / a_{14};$$

$$a_{17} = a_9 \cos \lambda_2 + a_{12} \sin \lambda_2 - (a_8 \cos \lambda_2 + a_{11} \sin \lambda_2) a_{15} / a_{14};$$

$$\dots$$

$$a_{35}^{[1]} = (a_{18}^{[1]} + a_{24}^{[1]}) \operatorname{ch} \lambda_3 + (a_{21}^{[1]} + a_{27}^{[1]}) \operatorname{sh} \lambda_3 + (a_{18}^{[1]} - a_{24}^{[1]}) \cos \lambda_3 + (a_{21}^{[1]} - a_{27}^{[1]}) \sin \lambda_3;$$

$$a_{36} = (a_{19} + a_{25}) \operatorname{ch} \lambda_3 + (a_{22} + a_{28}) \operatorname{sh} \lambda_3 + (a_{19} - a_{25}) \cos \lambda_3 + (a_{22} - a_{28}) \sin \lambda_3;$$

$$a_{37} = (a_{20} + a_{26}) \operatorname{ch} \lambda_3 + (a_{23} + a_{29}) \operatorname{sh} \lambda_3 + (a_{20} - a_{26}) \cos \lambda_3 + (a_{23} - a_{29}) \sin \lambda_3;$$

$$a_{38}^{[1]} = k_{3,4} [(a_{18}^{[1]} + a_{24}^{[1]}) \operatorname{sh} \lambda_3 + (a_{21}^{[1]} + a_{27}^{[1]}) \operatorname{ch} \lambda_3 - (a_{18}^{[1]} - a_{24}^{[1]}) \sin \lambda_3 + (a_{21}^{[1]} - a_{27}^{[1]}) \cos \lambda_3];$$

$$a_{39} = k_{3,4} [(a_{19} + a_{25}) \operatorname{sh} \lambda_3 + (a_{22} + a_{28}) \operatorname{ch} \lambda_3 - (a_{19} - a_{25}) \sin \lambda_3 + (a_{22} - a_{28}) \cos \lambda_3];$$

$$a_{40} = k_{3,4} [(a_{20} + a_{26}) \operatorname{sh} \lambda_3 + (a_{23} + a_{29}) \operatorname{ch} \lambda_3 - (a_{20} - a_{26}) \sin \lambda_3 + (a_{23} - a_{29}) \cos \lambda_3];$$

$$a_{41}^{[1]} = k_{3,4}^2 [(a_{18}^{[1]} + a_{24}^{[1]}) \operatorname{ch} \lambda_3 + (a_{21}^{[1]} + a_{27}^{[1]}) \operatorname{sh} \lambda_3 - (a_{18}^{[1]} - a_{24}^{[1]}) \cos \lambda_3 - (a_{21}^{[1]} - a_{27}^{[1]}) \sin \lambda_3];$$

$$a_{42} = k_{3,4}^2 [(a_{19} + a_{25}) \operatorname{ch} \lambda_3 + (a_{22} + a_{28}) \operatorname{sh} \lambda_3 - (a_{19} - a_{25}) \cos \lambda_3 - (a_{22} - a_{28}) \sin \lambda_3];$$

$$a_{43} = k_{3,4}^2 [(a_{20} + a_{26}) \operatorname{ch} \lambda_3 + (a_{23} + a_{29}) \operatorname{sh} \lambda_3 - (a_{20} - a_{26}) \cos \lambda_3 - (a_{23} - a_{29}) \sin \lambda_3];$$

$$a_{44}^{[1]} = k_{3,4}^3 [(a_{18}^{[1]} + a_{24}^{[1]}) \operatorname{sh} \lambda_3 + (a_{21}^{[1]} + a_{27}^{[1]}) \operatorname{ch} \lambda_3 + (a_{18}^{[1]} - a_{24}^{[1]}) \sin \lambda_3 - (a_{21}^{[1]} - a_{27}^{[1]}) \cos \lambda_3];$$

$$a_{45} = k_{3,4}^3 [(a_{19} + a_{25}) \operatorname{sh} \lambda_3 + (a_{22} + a_{28}) \operatorname{ch} \lambda_3 + (a_{19} - a_{25}) \sin \lambda_3 - (a_{22} - a_{28}) \cos \lambda_3];$$

$$a_{46} = k_{3,4}^3 [(a_{20} + a_{26}) \operatorname{sh} \lambda_3 + (a_{23} + a_{29}) \operatorname{ch} \lambda_3 + (a_{20} - a_{26}) \sin \lambda_3 - (a_{23} - a_{29}) \cos \lambda_3];$$

$$a_{47}^{[1]} = (a_{35}^{[1]} + a_{41}^{[1]}) \operatorname{ch} \lambda_4 + (a_{38}^{[1]} + a_{44}^{[1]}) \operatorname{sh} \lambda_4;$$

$$a_{48} = (a_{36} + a_{42}) \operatorname{ch} \lambda_4 + (a_{39} + a_{45}) \operatorname{sh} \lambda_4; \quad (13)$$

$$a_{49} = (a_{37} + a_{43}) \operatorname{ch} \lambda_4 + (a_{40} + a_{46}) \operatorname{sh} \lambda_4;$$

$$a_{50}^{[1]} = [a_{35}^{[1]} - a_{41}^{[1]} - (a_{36} - a_{42}) a_{47}^{[1]} / a_{48}] \cos \lambda_4 + [a_{38}^{[1]} - a_{44}^{[1]} - (a_{39} - a_{45}) a_{47}^{[1]} / a_{48}] \sin \lambda_4; \quad \text{где}$$

$$a_{51} = [a_{37} - a_{43} - (a_{36} - a_{42}) a_{49} / a_{48}] \cos \lambda_4 + [a_{40} - a_{46} - (a_{39} - a_{45}) a_{49} / a_{48}] \sin \lambda_4,$$

$$k_{i,j} = \lambda_i / l_i \cdot \lambda_j / l_j \quad \text{при } i = 1, 2, 3 \text{ и } j = 2, 3, 4.$$

Комплексные параметры, обозначенные в (13)  $a_i^{[1]}$ , имеют два значения:  $a_i$  и  $a_i^1$ . Для их вычисления в расчетной формуле все аналогично обозначенные параметры должны приниматься соответственно. Например, из выражения для  $a_{13}^{[1]}$  можно определить

$$a_{13} = a_1 \operatorname{ch} \lambda_2 + a_4 \operatorname{sh} \lambda_2 \quad \text{и} \quad a_{13}^1 = a_1^1 \operatorname{ch} \lambda_2 + a_4^1 \operatorname{sh} \lambda_2.$$

При наличии в пределах глубины погружения сваи трех слоев грунта количество рассчитываемых комплексных параметров  $a_i$  уменьшается до 34, а при двух слоях – до 17. Для этих случаев функции  $F_k(\lambda)$  вычисляются по формулам:

при трех слоях

$$F_{11}^{(3)}(\lambda) = -\lambda_1^3 2a_{33} / a_{34}; \quad F_{20}^{(3)}(\lambda) = -\lambda_1^3 2a_{33}^1 / a_{34};$$

$$F_9^{(3)}(\lambda) = -\lambda_1^2 [1 + 2(a_{30} a_{34} - a_{32} a_{33}) / a_{31} a_{34}]; \quad (14)$$

$$F_7^{(3)}(\lambda) = -\lambda_1^2 [1 + 2(a_{30}^1 a_{34} - a_{32} a_{33}^1) / a_{31} a_{34}];$$

при двух слоях

$$\begin{aligned}
F_{11}^{(2)}(\lambda) &= -\lambda_1^3 2a_{16} / a_{17}; & F_{20}^{(2)}(\lambda) &= -\lambda_1^3 2a_{16}^1 / a_{17}; \\
F_9^{(2)}(\lambda) &= -\lambda_1^2 [1 + 2(a_{13}a_{17} - a_{15}a_{16}) / a_{14}a_{17}]; \\
F_7^{(2)}(\lambda) &= -\lambda_1^2 [1 + 2(a_{13}^1 a_{17} - a_{15}a_{16}^1) / a_{14}a_{17}].
\end{aligned}
\tag{15}$$

Следует отметить, что соответствующие функции комплексного переменного (12), (14) и (15) полностью согласуются между собой. При присвоении нижнему слою грунта нулевых значений характеристик (т.е. отсутствию данного слоя) выражения (12) превращаются в (14) и затем в (15). Аналогично параметры жесткости и демпфирования сдвиго-вращательных колебаний одиночной сваи, определенные по формуле (11), становятся полностью идентичными, соответствующими выражениям, полученным для свай в однородном полупространстве.

Для удобства практического применения предлагаемого метода расчета используются функции  $f_{11}^{(2,3,4)}$ ,  $f_9^{(2,3,4)}$ ,  $f_7^{(2,3,4)}$  и  $f_{20}^{(2,3,4)}$ , которые зависят только от безразмерных параметров  $a_0$ ,  $l_{1.2.3.4}/r$ ,  $V_{s1.s2.s3.s4}/V_{св}$ ,  $\rho_{1.2.3.4}/\rho_{св}$ . После вычисления функции корректируются с учетом скорости поперечной волны в верхнем слое грунта, размеров и модуля упругости материала сваи. Это позволяет анализировать влияние различных факторов на уровень колебаний свайного фундамента и проводить оптимизацию свайного основания [10].

Безразмерные функции жесткости  $f_{11.1}^{(2,3,4)}$ ,  $f_{9.1}^{(2,3,4)}$ ,  $f_{7.1}^{(2,3,4)}$  и демпфирования  $f_{11.2}^{(2,3,4)}$ ,  $f_{9.2}^{(2,3,4)}$ ,  $f_{7.2}^{(2,3,4)}$  одиночной сваи для слоистых оснований с убывающими и возрастающими по глубине модулями сдвига грунта  $G$  и сравнение их с однородным основанием с усредненными характеристиками показаны на рисунках 3 и 4. Анализ приведенных графиков свидетельствует о существенном влиянии неоднородности грунта и, главным образом, характеристик верхнего слоя на параметры сдвиго-вращательных колебаний свай. Несмотря на отличие расчетных формул и получаемых значений функций  $f_9^{(2,3,4)}$  и  $f_{20}^{(2,3,4)}$ , параметры жесткости  $K_{\varphi x}^1$ ,  $K_{x\varphi}^1$  и демпфирования  $C_{\varphi x}^1$ ,  $C_{x\varphi}^1$  практически совпадают. Поэтому графики функций  $f_{20}^{(2,3,4)}$  не приводятся.

Запишем дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня с учетом сопротивления окружающего грунта

$$-EA \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} + S_w w(z,t) = 0,
\tag{16}$$



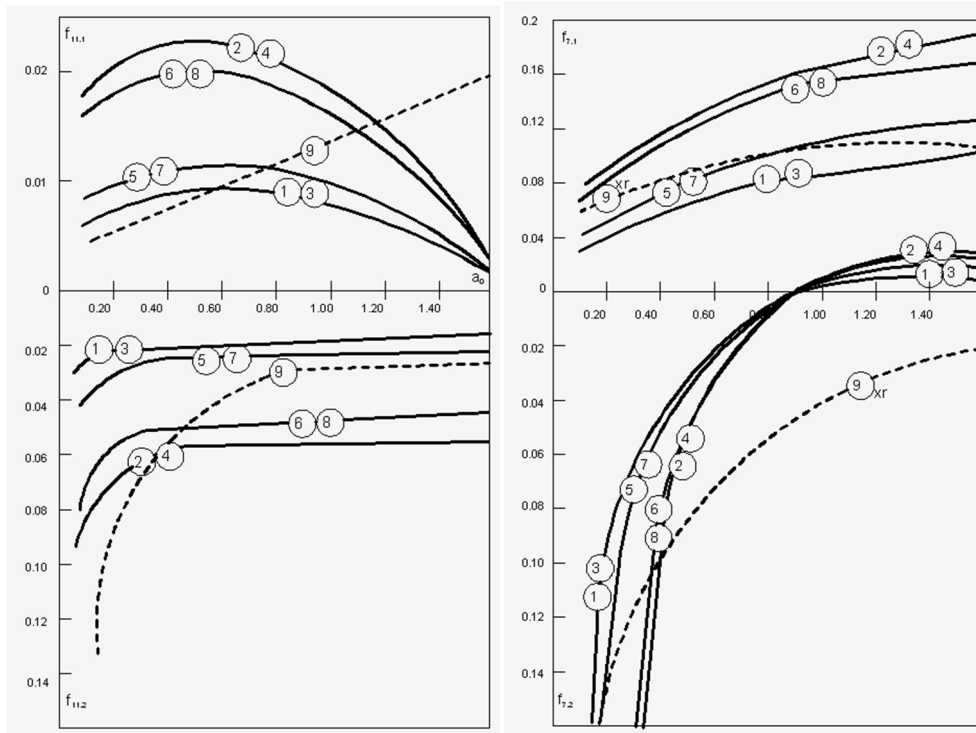


Рисунок 4 – Графики функций жесткости  $f_{11,1}$ ,  $f_{7,1}$  и демпфирования  $f_{11,2}$ ,  $f_{7,2}$  одиночной сваи в зависимости от безразмерной частоты колебаний  $a_0$  и учета слоистости грунтового основания (параметры см. рис. 3)

где  $E$ ,  $c$ ,  $A$ ,  $\bar{m}$  – соответственно модуль упругости, коэффициент демпфирования материала, площадь поперечного сечения и масса единицы длины сваи. Сопротивление среды перемещениям стержня также принимаем по зависимостям, полученным для заглубленного фундамента [4]:

$$S_w = G(S_{w1} + iS_{w2});$$

$$S_{w1} = 2\pi a_0 \frac{J_1(a_0)J_0(a_0) + Y_1(a_0)Y_0(a_0)}{J_0^2(a_0) + Y_0^2(a_0)}; \quad S_{w2} = \frac{4}{J_0^2(a_0) + Y_0^2(a_0)}. \quad (17)$$

Принимая  $w(z,t) = w(z)e^{i\omega t}$ , формулу (17) можно выразить как

$$-El \frac{\partial^2 w(z)}{\partial z^2} + [GS_{w1} - \bar{m}\omega^2 + i(c\omega + GS_{w2})]w(z) = 0. \quad (18)$$

Общим решением этой формулы будет

$$w(z) = c_5 \cos \frac{\Lambda}{l} z + c_6 \sin \frac{\Lambda}{l} z, \quad (19)$$

где  $\Lambda$  – комплексный параметр частоты.

$$\Lambda = \Lambda_1 + i\Lambda_2 = l \sqrt{(\bar{m}\omega^2 - GS_{w1} - i(c\omega + GS_{w2})) / EA} \approx$$

$$\approx l \sqrt{(\bar{m}\omega^2 - GS_{w1} - iGS_{w2}) / EA}. \quad (20)$$

Влияние слоев на продольные колебания стержня также рассматриваем отдельно [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ слой} \quad w_1(z) = c_{5.1} \cos \frac{\Lambda_1}{l_1} z + c_{6.1} \sin \frac{\Lambda_1}{l_1} z; \\ 2 \text{ слой} \quad w_2(z) = c_{5.2} \cos \frac{\Lambda_2}{l_2} z + c_{6.2} \sin \frac{\Lambda_2}{l_2} z; \\ 3 \text{ слой} \quad w_3(z) = c_{5.3} \cos \frac{\Lambda_3}{l_3} z + c_{6.3} \sin \frac{\Lambda_3}{l_3} z; \\ 4 \text{ слой} \quad w_4(z) = c_{5.4} \cos \frac{\Lambda_4}{l_4} z + c_{6.4} \sin \frac{\Lambda_4}{l_4} z. \end{array} \right. \quad (21)$$

Используя равенство перемещений  $w(z)$  и продольных сил в стержне  $N(z)$  на границах слоев, можно составить систему уравнений для исключения  $c_{5.2}$ ,  $c_{6.2}$ ,  $c_{5.3}$ ,  $c_{6.3}$ ,  $c_{5.4}$ ,  $c_{6.4}$  и определения  $c_{5.1}$ ,  $c_{6.1}$  с учетом влияния нижележащих слоев.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{5.1} = w(0); \\ c_{5.1} \cos \Lambda_1 + c_{6.1} \sin \Lambda_1 = c_{5.2}; \\ c_{5.2} \cos \Lambda_2 + c_{6.2} \sin \Lambda_2 = c_{5.3}; \\ c_{5.3} \cos \Lambda_3 + c_{6.3} \sin \Lambda_3 = c_{5.4}; \\ c_{5.4} \cos \Lambda_4 + c_{6.4} \sin \Lambda_4 = w(l); \\ -c_{5.1} \frac{\Lambda_1}{l_1} \sin \Lambda_1 + c_{6.1} \frac{\Lambda_1}{l_1} \sin \Lambda_1 = c_{6.2} \frac{\Lambda_2}{l_2}; \\ -c_{5.2} \frac{\Lambda_2}{l_2} \sin \Lambda_2 + c_{6.2} \frac{\Lambda_2}{l_2} \sin \Lambda_2 = c_{6.3} \frac{\Lambda_3}{l_3}; \\ -c_{5.3} \frac{\Lambda_3}{l_3} \sin \Lambda_3 + c_{6.3} \frac{\Lambda_3}{l_3} \sin \Lambda_3 = c_{6.4} \frac{\Lambda_4}{l_4}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Подставив полученные значения  $c_{5.1}$ ,  $c_{6.1}$  в первое уравнение (6), определяем выражение для вертикальных колебаний верхнего конца стержня.

При назначении граничных условий будем разделять сваи на стойки, опирающиеся на несжимаемые грунты, и висячие сваи трения (как в статике). Для стоек учитываем невозможность вертикальных перемещений нижнего конца, а для висячих свай – продольную силу на нижнем конце приравняем к реакции упругого полупространства перемещения круглого штампа равного радиуса, выраженной через аналитические зависимости [4], вычисляемые с учетом [12].

Из выражения продольной силы  $N(z) = EA \frac{dw(z)}{dz}$ , приложенной к голове сваи и вызывающей ее единичное смещение, находим параметры жесткости и демпфирования вертикальных колебаний одиночной сваи  $K_{zz}^1$  и  $C_{zz}^1$ . Для сваи-стойки после преобразований с учетом нумерации функций для колеблющихся стержней [9] имеем

$$\begin{aligned}
K_{zz}^1 &= \frac{EA}{r} f_{18.1}^{(2,3,4)}; & C_{zz}^1 &= \frac{EA}{V_{s1}} f_{18.2}^{(2,3,4)}; \\
f_{18.1}^{(2,3,4)} &= \frac{f_{18.1}^{(2,3,4)}(\Delta)}{l_1/r}; & f_{18.2}^{(2,3,4)} &= \frac{f_{18.2}^{(2,3,4)}(\Delta)}{a_0 l_1/r}; \\
f_{18}^{(2,3,4)}(\Delta) &= f_{18.1}^{(2,3,4)}(\Delta) + i f_{18.2}^{(2,3,4)}(\Delta) = -\Lambda_1 \frac{\Phi_1^{(2,3,4)}(\Delta)}{\Phi_2^{(2,3,4)}(\Delta)}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Аналогичные выражения для висячей сваи:

$$\begin{aligned}
K_{zz}^1 &= \frac{EA}{r} f_{19.1}^{(2,3,4)}; & C_{zz}^1 &= \frac{EA}{V_{s1}} f_{19.2}^{(2,3,4)}; \\
f_{19.1}^{(2,3,4)} &= \frac{f_{19.1}^{(2,3,4)}(\Delta)}{l_1/r}; & f_{19.2}^{(2,3,4)} &= \frac{f_{19.2}^{(2,3,4)}(\Delta)}{a_0 l_1/r}; \\
f_{19}^{(2,3,4)}(\Delta) &= f_{19.1}^{(2,3,4)}(\Delta) + i f_{19.2}^{(2,3,4)}(\Delta) = \\
&= -\Delta_1 \frac{K' \Lambda_1 \Phi_3^{(2,3,4)}(\Delta) + (F_{z1} + i F_{z2}) \Phi_1^{(2,3,4)}(\Delta)}{K' \Lambda_1 \Phi_4^{(2,3,4)}(\Delta) + (F_{z1} + i F_{z2}) \Phi_5^{(2,3,4)}(\Delta)},
\end{aligned} \tag{24}$$

где  $K' = \frac{EA}{G_0 l_1 r} = \pi \frac{r}{l_1} \frac{\rho_{св}}{\rho_0} \left( \frac{V_{св}}{V_{s0}} \right)^2$ ;  $V_{s0}, V_{s1}, \dots, V_{s4}$  – скорости поперечных волн в

грунте под нижним концом сваи и в соответствующих слоях по глубине ее погружения [8];  $V_{св}$  – скорость продольной волны в свае.

Функции комплексного переменного  $\Phi_k^{(2,3,4)}(\Delta) = \Phi_{k.1}^{(2,3,4)}(\Delta) + i \Phi_{k.2}^{(2,3,4)}(\Delta)$  определяются, например, по формулам:

при наличии двух слоев в пределах глубины погружения сваи (для трехслойного основания):

$$\begin{aligned}
\hat{O}_1^{(2)}(\Delta) &= R_{1,2} \sin \Lambda_1 \sin \Lambda_2 - \cos \Lambda_1 \cos \Lambda_2; \\
\hat{O}_2^{(2)}(\Delta) &= \hat{O}_5^{(2)}(\Delta) = \sin \Lambda_1 \cos \Lambda_2 + k_{1,2} \cos \Lambda_1 \sin \Lambda_2; \\
\hat{O}_3^{(2)}(\Delta) &= \cos \Lambda_1 \sin \Lambda_2 / k_{1,2} + \sin \Lambda_1 \cos \Lambda_2; \\
\hat{O}_4^{(2)}(\Delta) &= \cos \Lambda_1 \cos \Lambda_2 - \sin \Lambda_1 \sin \Lambda_2 / k_{1,2};
\end{aligned} \tag{25}$$

при наличии четырех слоев в пределах глубины погружения сваи:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(4)}(\Delta) &= k_{1,2} \sin \Delta_1 \sin \Delta_2 \cos \Delta_3 \cos \Delta_4 + k_{3,2} \cos \Delta_1 \sin \Delta_2 \sin \Delta_3 \cos \Delta_4 + \\
&+ k_{1,3} \sin \Delta_1 \cos \Delta_2 \sin \Delta_3 \cos \Delta_4 + k_{3,4} \cos \Delta_1 \cos \Delta_2 \sin \Delta_3 \sin \Delta_4 + \\
&+ k_{1,2} k_{3,4} \sin \Delta_1 \sin \Delta_2 \sin \Delta_3 \sin \Delta_4 + k_{2,4} \cos \Delta_1 \sin \Delta_2 \cos \Delta_3 \sin \Delta_4 + \\
&+ k_{1,4} \sin \Delta_1 \cos \Delta_2 \cos \Delta_3 \sin \Delta_4 + \cos \Delta_1 \cos \Delta_2 \cos \Delta_3 \cos \Delta_4; \\
\Phi_2^{(4)}(\Delta) &= \sin \Delta_1 \cos \Delta_2 \cos \Delta_3 \cos \Delta_4 + k_{1,2} \cos \Delta_1 \sin \Delta_2 \cos \Delta_3 \cos \Delta_4 + \\
&+ k_{2,3} \sin \Delta_1 \sin \Delta_2 \sin \Delta_3 \cos \Delta_4 + k_{1,3} \cos \Delta_1 \cos \Delta_2 \sin \Delta_3 \cos \Delta_4 + \\
&+ k_{3,4} \sin \Delta_1 \cos \Delta_2 \sin \Delta_3 \sin \Delta_4 + k_{1,2} k_{3,4} \cos \Delta_1 \sin \Delta_2 \sin \Delta_3 \sin \Delta_4 + \\
&+ k_{2,4} \sin \Delta_1 \sin \Delta_2 \cos \Delta_3 \sin \Delta_4 + k_{1,4} \cos \Delta_1 \cos \Delta_2 \cos \Delta_3 \sin \Delta_4;
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3^{(4)}(\Lambda) = & \cos \Lambda_1 \cos \Lambda_2 \cos \Lambda_3 \sin \Lambda_4 / k_{1,4} - \sin \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \cos \Lambda_3 \sin \Lambda_4 k_{1,2} / k_{1,4} + \\ & + \cos \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \sin \Lambda_3 \sin \Lambda_4 k_{2,3} / k_{1,4} + \sin \Lambda_1 \cos \Lambda_2 \sin \Lambda_3 \sin \Lambda_4 k_{1,3} / k_{1,4} + \\ & + \cos \Lambda_1 \cos \Lambda_2 \sin \Lambda_3 \cos \Lambda_4 / k_{1,3} - \sin \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \sin \Lambda_3 \cos \Lambda_4 k_{1,2} / k_{1,3} + \\ & + \cos \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \cos \Lambda_3 \cos \Lambda_4 / k_{1,2} + \sin \Lambda_1 \cos \Lambda_2 \cos \Lambda_3 \cos \Lambda_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_4^{(4)}(\Lambda) = & \cos \Lambda_1 \cos \Lambda_2 \cos \Lambda_3 \cos \Lambda_4 - \sin \Lambda_1 \cos \Lambda_2 \cos \Lambda_3 \sin \Lambda_4 / k_{1,4} - \\ & - \cos \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \cos \Lambda_3 \sin \Lambda_4 k_{1,2} / k_{1,4} + \cos \Lambda_1 \cos \Lambda_2 \sin \Lambda_3 \sin \Lambda_4 k_{1,3} / k_{1,4} - \\ & - \sin \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \sin \Lambda_3 \sin \Lambda_4 k_{2,3} / k_{1,4} - \sin \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \cos \Lambda_3 \cos \Lambda_4 / k_{1,2} - \\ & - \sin \Lambda_1 \cos \Lambda_2 \sin \Lambda_3 \cos \Lambda_4 / k_{1,3} - \cos \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \sin \Lambda_3 \cos \Lambda_4 k_{1,2} / k_{1,3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_5^{(4)}(\Lambda) = & \sin \Lambda_1 \cos \Lambda_2 \cos \Lambda_3 \cos \Lambda_4 + k_{1,2} \cos \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \cos \Lambda_3 \cos \Lambda_4 + \\ & + k_{1,3} \cos \Lambda_1 \cos \Lambda_2 \sin \Lambda_3 \cos \Lambda_4 - k_{2,3} \sin \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \sin \Lambda_3 \cos \Lambda_4 + \\ & + k_{1,4} \cos \Lambda_1 \cos \Lambda_2 \cos \Lambda_3 \sin \Lambda_4 - k_{2,4} \sin \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \cos \Lambda_3 \sin \Lambda_4 - \\ & - k_{3,4} \sin \Lambda_1 \cos \Lambda_2 \sin \Lambda_3 \sin \Lambda_4 - k_{1,2} k_{3,4} \cos \Lambda_1 \sin \Lambda_2 \sin \Lambda_3 \sin \Lambda_4, \end{aligned}$$

где  $k_{i,j} = \lambda_i / l_i \cdot \lambda_j / l_j$  при  $i = 1, 2, 3$  и  $j = 2, 3, 4$ .

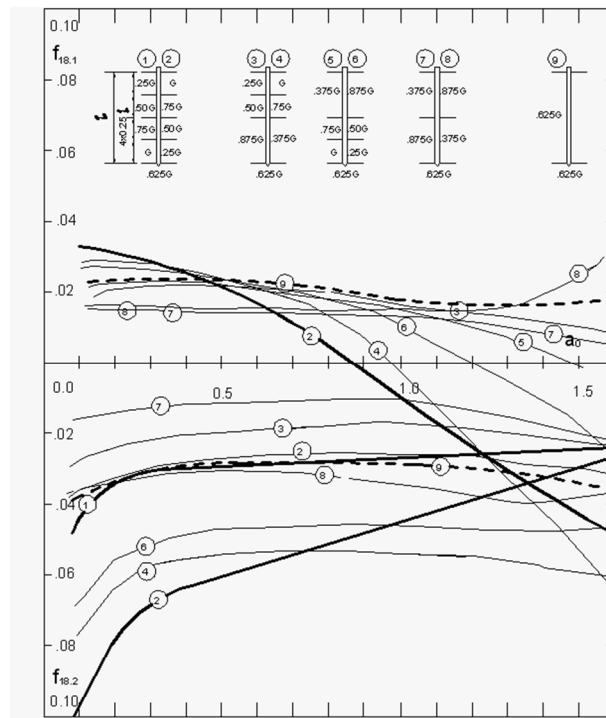


Рисунок 5 – Графики функций жесткости  $f_{18.1}$  и демпфирования  $f_{18.2}$  одиночной сваи в зависимости от безразмерной частоты колебаний  $a_0$  и учета слоистости грунтового основания ( $\rho_1/\rho_0 = 1,0$ ; остальные параметры см. рис. 3)

Здесь также соответствующие функции (25), (26) и неприведенные выражения для случая с тремя слоями грунта в пределах глубины погружения сваи полностью согласуются между собой. При присвоении нижнему слою грунта нулевых значений характеристик (т.е. отсутствии данного слоя), выражения (26) превращаются в функции для трех слоев и затем – в (25). Аналогично параметры жесткости и демпфирования вертикальных колебаний одиночной сваи, определенные по формуле (25), становятся

полностью идентичными, соответствующими выражениям, полученным для свай в однородном полупространстве.

Для удобства применения аппроксимированные функции  $f_{18}^{(2,3,4)}$  и  $f_{19}^{(2,3,4)}$  также зависят только от безразмерных параметров  $a_0$ ,  $l_{1,2,3,4}/l$ ,  $l/r$ ,  $V_{s1}/V_{cв}$ ,  $V_{s1}/V_{s0.s2.s3.s4}$ ,  $\rho_1/\rho_{св}$ ,  $\rho_1/\rho_{0,2,3,4}$ . После вычисления функции корректируются с учетом скорости поперечной волны в верхнем слое грунта, размеров и модуля упругости материала свай.

Безразмерные функции жесткости  $f_{18.1}^{(2,3,4)}$ ,  $f_{19.1}^{(2,3,4)}$  и демпфирования  $f_{18.2}^{(2,3,4)}$ ,  $f_{19.2}^{(2,3,4)}$  одиночной свай для слоистых оснований с убывающими и возрастающими по глубине модулями сдвига грунта  $G$  и сравнение их с однородным основанием с усредненными характеристиками показаны на рисунках 5 и 6.

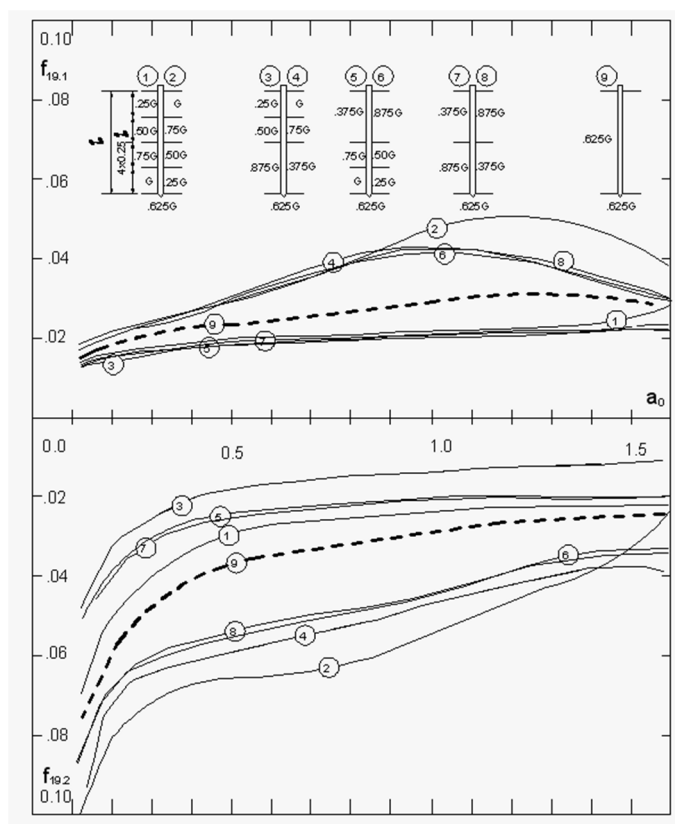


Рисунок 6 – Графики функций жесткости  $f_{19.1}$  и демпфирования  $f_{19.2}$  одиночной свай в зависимости от безразмерной частоты колебаний  $a_0$  и учета слоистости грунтового основания (параметры см. рис. 5)

**Выводы.** Анализ графиков функций жесткости и демпфирования одиночной свай на рисунках 3, 4, 5 и 6 свидетельствует о достаточно большом влиянии неоднородности грунта на динамические параметры свайного основания и возможности повышения точности вычислений по предлагаемой волновой модели свайного фундамента при учете реального сложения грунтов.

Наиболее значительное различие в параметрах между слоистым и однородным грунтовыми основаниями наблюдается при горизонтальных (сдвиго-вращательных) колебаниях свайного фундамента, особенно в случае существенного отличия характеристик верхнего слоя от остального грунтового массива.

### Литература

1. Забылин, М. И. Расчет фундаментов под машины: учебное пособие. / М.И. Забылин. – Новосибирск: Изд.-во НИСИ им. В.В. Куйбышева, 1983. – 83 с.
2. Ракивненко, Н.С. Колебание сплошных фундаментов на упругом основании / Н.С. Ракивненко // Исследование колебания конструкций: сб. ст. – Х.: ОНТИ, 1935. – С. 62 – 86.
3. Холмянский, М.Л. К расчету перемещений основания при периодической нагрузке / М.Л. Холмянский // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2007. – №5. – С. 2 – 6.
4. Баранов, В.А. О расчете вынужденных колебаний заглубленного фундамента / В.А. Баранов // Вопросы динамики прочности. – Рига: РПИ, 1967. – №14. – С. 195 – 209.
5. Шехтер, О.Я. Об учете инерционных свойств грунта при расчете вертикальных вынужденных колебаний массивных фундаментов / О.Я. Шехтер // Вибрации оснований и фундаментов: сборник трудов НИИОСП. – М., 1948. – № 12. – С. 72 – 89.
6. Novak, M. Dynamic Stiffness and Damping of Piles / M. Novak // Canadian Geotechnical Journal. – 1974. – V.11, № 4. – С. 574 – 598.
7. Нуждин, Л.В. Жесткость и демпфирование сдвиговращательных колебаний свайного фундамента в слоистых грунтах / Л.В. Нуждин, М.И. Забылин // Строительство. Известия вузов. – 1992. – № 11, 12. – С. 38 – 44.
8. Нуждин, Л.В. Исследование грунтов для анализа динамического поведения свайных фундаментов / Л.В. Нуждин // Труды V Междунар. конф. по проблемам свайного фундаментостроения. – М., Пермь: РНКМГиФ, ПГТУ, 1996. – С. 119 – 123.
9. Колоушек, В. Динамика строительных конструкций / В. Колоушек. – М.: Изд-во литературы по стр-ву, 1965. – 632 с.
10. Нуждин, Л.В. Прогнозирование колебаний и оптимизация конструкции свайных фундаментов, эксплуатируемых при динамическом нагружении / Л.В. Нуждин, Д.А. Полинкевич // Реконструкция городов и геотехническое строительство. – СПб., 2004. – № 8. – С. 113 – 118.
11. Нуждин, Л.В. Жесткость и демпфирование вертикальных колебаний свайного фундамента в слоистом основании / Л.В. Нуждин, М.И. Забылин // Строительство и архитектура. Известия вузов. – 1990. – № 12. – С. 36 – 41.
12. Нуждин, Л.В. К расчету динамических параметров упругого основания / Л.В. Нуждин // Механика грунтов в геотехнике и фундаментостроении: мат. Всерос. научно-техн. конф. – Новочеркасск: ЮРГТУ (НПИ), 2012. – С. 64 – 69.
13. Nuzhdin, L.V. Calculation of foundations vibration induced through basement soil using wave models / L.V. Nuzhdin // Soil Mechanics and Geotechnical Engineering: Challenges and Solutions: The 14th Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. – Hong Kong: Published HKGS & DCSE & HKPU, – 2011. – P.5 – 8. (№472. On CD).

Надійшла до редакції 27.09.2012

© Л.В. Нуждин