

*О.О. Петраков, д.т.н., профессор  
Н.О. Петракова, к.т.н., доцент, Н.Г. Лобачева, к.т.н., доцент  
Донбаська національна академія будівництва та архітектури*

## **РОЗРАХУНОК ПРУЖНЬО-ПЛАСТИЧНИХ ЗАДАЧ ПРИ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ І ОСНОВ**

*Запропоновано чисельні алгоритми розрахунку бетонних конструкцій і ґрунтових основ при складних навантаженнях у нелінійній постановці, що ґрунтуються на розв'язанні змішаної задачі теорії пружності і пластичності. Пружня задача розв'язується методом скінченних елементів. Граничні стани бетонних елементів і ґрунтових основ за міцністю встановлюються із застосуванням теорії міцності Кулона – Мора. Втратою несучої здатності бетонного елемента вважається досягнення в ньому граничної стискальності. Встановлено, що використання білінійних діаграм деформування бетонних елементів призводить до нелінійних діаграм деформування бетонної конструкції. У прикладі встановлено теоретичну відповідність між кубовою і призмовою міцністю бетону. Методи розрахунку реалізовано у вигляді нової версії програмного комплексу «Нелінійний Поліфем».*

**Ключові слова:** теорія пластичності, складне навантаження, змішана задача теорії пружності і пластичності.

*А.А. Петраков, д.т.н., профессор  
Н.А. Петракова, к.т.н., доцент, Н.Г. Лобачева, к.т.н., доцент  
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры*

## **РАСЧЕТ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИ СЛОЖНОЙ НАГРУЗКЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ОСНОВАНИЙ**

*Предложены численные алгоритмы расчета бетонных конструкций и ґрунтовых оснований при сложных нагрузках в нелинейной постановке, основанные на решении смешанной задачи теории упругости и пластичности. Упругая задача решается методом конечных элементов. Предельные состояния бетонных элементов и ґрунтовых оснований по прочности устанавливаются с применением теории прочности Кулона – Мора. Потерей несущей способности бетонного элемента считается достижение в нем предельной сжимаемости. Установлено, что использование билинейных диаграмм деформирования бетонных элементов приводит к нелинейным диаграммам деформирования бетонной конструкции. В примере установлено теоретическое соответствие между кубовой и призменной прочностью бетона. Методы расчета реализованы в виде новой версии программного комплекса «Нелинейный Полифем».*

**Ключевые слова:** теория пластичности, сложная нагрузка, смешанная задача теории упругости и пластичности.

*A.A. Petrakov, Doctor of Science  
N.A. Petrakova, Ph.D, N.G. Lobacheva, Ph.D  
Donbass national academy of civil engineering and architecture*

## **CALCULATION OF ELASTIC-PLASTIC PROBLEMS AT DIFFICULT LOADING BUILDING DESIGNS AND THE BASES**

*Numerical algorithms of calculation of concrete designs and the soil bases are offered at difficult loading in the nonlinear statement, based on the decision of the mixed problem of the theory of elasticity and plasticity. The elastic problem dares a method of final elements. Limiting conditions*

of concrete elements and the soil bases on durability are established with application of the theory of durability of the Coulomb-Mora. Loss of bearing ability of a concrete element considers achievement in it limiting compressibility. Researches it is established that use of bilinear diagrams of deformation of concrete elements leads to nonlinear diagrams of deformation of a concrete design. In a example theoretical conformity between cube and prismatic durability of concrete is established. Calculation methods are realized in the form of the new version of a program complex «Nonlinear Polifem».

**Keywords:** the plasticity theory, difficult loading, the mixed problem of the theory of resiliency and plasticity.

**Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими практичними завданнями.** Розглядаються навантаження, у процесі яких відбувається неузгодженість векторів напруг і деформацій. Останнє може бути перерозподілом напруг у системі, у тому числі навіть при пропорційній зміні або непропорційній зміні навантажуючих факторів. Найпоширенішим видом складних навантажень є перемінні навантаження, що викликають розвантаження (зміна напрямку навантаження) в елементах будівельних конструкцій і в ґрунтових основах.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій, у яких започатковано розв'язання проблеми.** Теоретичні основи складного навантаження будівельних конструкцій, виготовлених із матеріалу, що має внутрішнє тертя, викладено в рамках деформаційної теорії пластичності в роботах [1, 2]. Методи нелінійного аналізу ґрунтових основ, призначених для чисельної реалізації, знаходять все більше і більше застосування в проектній практиці [7, 8]. Точні методи ґрунтуються на гіпотезах теорії пластичної течії [3, 4] або гіпотезах деформаційної теорії пластичності [2].

**Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття.** Незважаючи на підвищений інтерес знаних науковців до обраної проблематики, дослідження складного навантаження бетонної конструкції і ґрунтової основи в умовах плоскої задачі не втрачає актуальності. Ці питання залишаються нерозв'язаними сповна, що вимагає їх подальшого розвитку.

**Мета роботи.** У цій роботі пропонуються практичні алгоритми для аналізу складного навантаження бетонної конструкції і ґрунтової основи в умовах плоскої задачі. Указані алгоритми реалізовано в новій версії програмного комплексу «Нелінійний Поліфем».

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Бетон розглянемо як пружньо-пластичний матеріал, що працює пружно до вичерпання міцності і переходить в пластичну течію при наступному навантаженні. Діаграма міцності бетону як анізотропного матеріалу описується з використанням міцності Кулона – Мора,

$$\frac{(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 4\tau_{zx}^2}{(2c \cdot \operatorname{ctg}\varphi - \sigma_x - \sigma_z)^2} = \sin^2 \varphi, \quad (1)$$

де  $\sigma_z, \sigma_x, \tau_{zx}$  – компоненти тензора напруг;  $c, \varphi$  – параметри міцності бетону, залежні від рівня навантаження.

Відповідно до норм проектування бетонних конструкцій [5] міцність бетону характеризується опором на одноосьовий стиск  $R_b$  і одноосьовий розтяг  $R_{bt}$ . На рис. 1 представлено діаграму міцності бетону, побудовану за двома експериментальними значеннями міцності  $R_b$  і  $R_{bt}$ , і лінійну апроксимацію відповідно до рівняння (1).

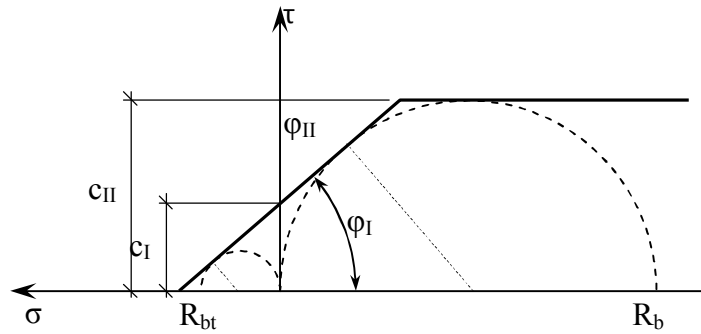


Рисунок 1 – Діаграма міцності бетону

У найпростішому випадку вказану апроксимацію представлено двома відрізками. При більшій кількості експериментальних точок (кіл Мора) точність апроксимації може бути підвищено за рахунок додавання лінійних ділянок. Перший відрізок на діаграмі характеризується кутом  $\varphi_I$  і параметром  $c_I$  (розмірність напруг). Другий відрізок характеризується параметром  $c_{II}$  і кутом  $\varphi_{II}$ , рівним нулю. Останнє узгоджується з нормативними уявленнями про відсутність зміцнення бетону в області стиску. Як деформаційні характеристики бетону використовують початковий модуль деформації  $E_b$  і коефіцієнт поперечної деформації  $\nu$ . Як початкові міцнісні й деформаційні характеристики ґрунтового масиву приймають такі: модуль деформації  $E$ , коефіцієнт Пуассона  $\chi$ , кут внутрішнього тертя  $\varphi$ , питоме зчеплення  $c$ .

Для реального напруженого стану визначається коефіцієнт  $k$  наближення до граничного стану. При множенні на цей коефіцієнт тензора напруг має виконуватися рівняння (1). Таким чином, дограничному стану роботи бетону відповідає коефіцієнт  $k$ , більший одиниці.

Реальні навантаження поділяють на ступені. У межах ступені навантаження вважається умовно простим. Таким чином, точність розв'язання задачі збільшується зі зменшенням інтенсивностей навантажуючих параметрів на ступені.

Для врахування особливостей складного навантаження сумарні навантаження в точці (скінченному елементі) записують

$$\sigma_z = \sigma_{z0} + k\sigma_{zs}; \quad \sigma_x = \sigma_{x0} + k\sigma_{xs}; \quad \tau_{zx} = \tau_{zx0} + k\tau_{zxs}, \quad (2)$$

де  $\sigma_{z0}, \sigma_{x0}, \tau_{zx0}$  – початкові напруги (сума всіх напруг на попередніх ступенях навантаження);

$\sigma_{zs}, \sigma_{xs}, \tau_{zxs}$  – збільшення напруг (напруги на розглянутому ступені навантаження);  
 $k$  – коефіцієнт наближення до граничного стану.

Для визначення коефіцієнта  $k$  у формулу (1) поставимо рівняння (2). Результат розв'язання має такий вигляд

$$k = \frac{\sqrt{b^2 - 4ad} - b}{2a}; \quad a = (\sigma_{zx} - \sigma_{xs})^2 + 4\tau_{zxs}^2 - \sin^2 \varphi (\sigma_{zs} + \sigma_{xs})^2; \quad (3)$$

$$b = 2c \sin 2\varphi (\sigma_{zs} + \sigma_{xs}) + \bar{b}; \quad \bar{b} = 2 \cdot [\cos^2 \varphi (\sigma_{zs} \sigma_{z0} + \sigma_{xs} \sigma_{x0}) - (1 + \sin^2 \varphi) (\sigma_{zs} \sigma_{x0} + \sigma_{z0} \sigma_{xs}) + 4\tau_{zxs} \tau_{zx0}]$$

$$d = -4c^2 \cos^2 \varphi + \bar{a} + \bar{d}; \quad \bar{a} = (\sigma_{z0} - \sigma_{x0})^2 + \tau_{zx0}^2 - \sin^2 \varphi (\sigma_{z0} + \sigma_{x0})^2;$$

$$\bar{d} = 2c \cdot \sin 2\varphi (\sigma_{z0} + \sigma_{x0}).$$

Як розрахункове значення коефіцієнта  $k$  приймають  $k_r = \min(k(\varphi_1, c_1), k(\varphi_2, c_2), K)$ .

Розв'язання задачі виконують методом послідовних навантажень. За результатами пружного розрахунку (програмний комплекс Поліфем) визначають мінімальний для конструкції коефіцієнт наближення до граничного стану  $i$ , якщо він менше або дорівнює одиниці, у зруйнованих елементах приймається жорсткість (модуль деформації), рівна

машинному нулю. Навантаження (на ступені навантаження) враховують як задану величину, помножену на коефіцієнт наближення до граничного стану.

Для елементів, що перейшли в текучий стан, перевіряється умова розвантаження. Ознакою розвантаження може бути збільшення коефіцієнта  $\bar{k}$ , віднесеного до сумарних напруг, на двох суміжних ступенях навантаження. При цьому коефіцієнт  $\bar{k}$  обчислюється за формулами (3), у яких початкові напруги (з індексом «0») приймають рівними нулю, а збільшення напруг (з індексом «s») – рівними сумарним напругам. Якщо виявлені елементи, у яких відбувається розвантаження, в останніх відновлюється початкова жорсткість (модуль деформації) і здійснюється перерахунок конструкції для цієї ступені навантаження.

Для розв'язання задачі щодо визначення напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в рамках розв'язання вісесиметричної змішаної пружньо-пластичної задачі в умовах плоскої деформації методом скінченних елементів (МСЕ) приймають такі основні положення розрахунку:

- ґрунтовий масив працює в умовах плоскої деформації по осі z;
- модуль деформації ґрунтового масиву змінний залежно від рівня напруг відповідно до компресійної кривої;
- розв'язання задачі здійснюється методом послідовних навантажень.

Сумарні напруги в кінцевому елементі записують у вигляді рівняння (2). Тільки в цьому випадку  $k$  – коефіцієнт наближення до ущільненого стану.

Коефіцієнт наближення до ущільненого стану вводиться у зв'язку з тим, що підвищення ступеня щільності ґрунту відбувається тільки до певної межі, що залежить від виду і фізичного стану ґрунту, та приймається з урахуванням компресійної кривої.

Сумарні переміщення вузлів кінцевого елемента записуються як

$$\Delta_y = \Delta_{y0} + \Delta_{ys}; \Delta_x = \Delta_{x0} + \Delta_{xs}, \quad (5)$$

де  $\Delta_{y0}, \Delta_{x0}$ , – початкові переміщення (сума всіх переміщень на попередніх ступенях навантаження);  $\Delta_{ys}, \Delta_{xs}$  – збільшення переміщень.

Результатами розв'язання задачі є:

- повні переміщення, напруги й деформації на ступені навантаження;
- коефіцієнти наближення до граничних станів за напругами і деформаціями;
- урахування (на ступені навантажень) навантаження і впливи;
- графічна інформація про досягнення в елементах системи граничних станів за напругами і деформаціями;
- протокол про розв'язання задачі з інформацією про досягнення граничних станів в елементах системи і перевизначенні міцностних характеристик.

Чисельні дослідження схем руйнування бетонної призми.

Як вихідні дані приймають міцностні й деформаційні характеристики бетону відповідно до норм [5]. Інтерпретація вказаних характеристик через параметри міцності  $c$  і  $\varphi$  здійснюють відповідно до рис. 1 за формулами

$$\sin \varphi_1 = \frac{R_b - R_{bt}}{R_b + R_{bt}}; c_1 = \frac{R_{bt} (1 + \sin \varphi_1)}{2 \cos \varphi_1}; \varphi_2 = 0; c_2 = \frac{R_b}{2}, \quad (6)$$

де  $\varphi_1, c_1, \varphi_2, c_2$  – параметри міцності бетону, що характеризують білінійну діаграму міцності (рис.1);

$R_b, R_{bt}$  – розрахункові опори бетону при одноосьовому стиску і розтяганні за нормами [5].

В чисельних дослідженнях прийнято:  $R_b=20000$  кПа;  $R_{bt}=1000$  кПа;  $E_b=20000$  МПа;  $\nu=0,15$ . Відповідні цим характеристикам параметри міцності бетону

становлять:  $\varphi_1=54,90$ ;  $c_1=3162$  кПа;  $\varphi_2=0$ ;  $c_2=10000$  кПа.

Геометричні розміри бетонної призми становлять 20x20x20 см. Навантаження здійснювалося у вигляді змушених вертикальних переміщень опорного перерізу. Закріплення в опорних перерізах задавалися у двох варіантах: без можливості бічних (горизонтальних) переміщень; за відсутності зв'язків у горизонтальному напрямку. Перша умова закріплення відповідає схемі випробування бетонного куба. Друга умова закріплення відповідає схемі випробування призми. Результати чисельних досліджень представлено у вигляді схем послідовних руйнувань елементів у досліджуваній конструкції (рис. 2) й у вигляді графіків залежностей відносних середніх нормальних напруг від середніх осьових деформацій (рис. 3). Аналіз результатів чисельних досліджень зводиться до такого.

Форми пластичних областей при навантаженні призми й куба істотно відрізняються. У призмі першими руйнуються елементи в зовнішніх гранях, розташовані у вершин піраміди випору. У куба першими починають руйнуватися елементи в зовнішніх гранях у середньому перерізі. Конструкція втрачає отпірність у той момент, коли зона пластичної текучості (точніше її проекція) повністю перетинає поперечний переріз. При цьому в призмі грані піраміди випору нахилені під кутом 450, у той час як у куба вказаний кут менше ніж 450. Площа зони пластичної текучості в момент руйнування в призмі більше ніж у куба. Це пояснює більшу деформативність при навантаженні призми, ніж при навантаженні куба. Після втрати отпірності конструкції подальше її навантаження приводить до досягнення граничного стиснення в елементах, що першими перейшли в стадію пластичної текучості. Цей стан класифікований як граничний за I групою (втрата несучої здатності).

Послідовне руйнування (перехід у стадію пластичної текучості) елементів конструкції призводить до того, що діаграма деформування (рис.3) здобуває нелінійний обрис. Це особливо характерно для навантаження призми. Іншими словами білінійні діаграми деформування елементів перетворюються в конструкції в інтегральну нелінійну діаграму деформування.

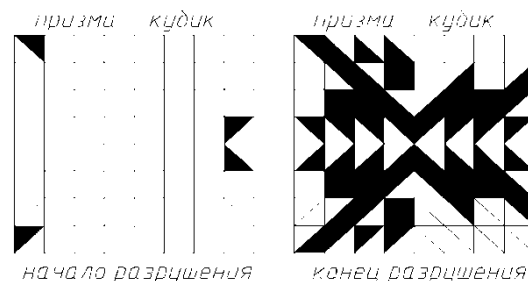


Рисунок 2 – Зони пластичної текучості при навантаженні бетонної конструкції

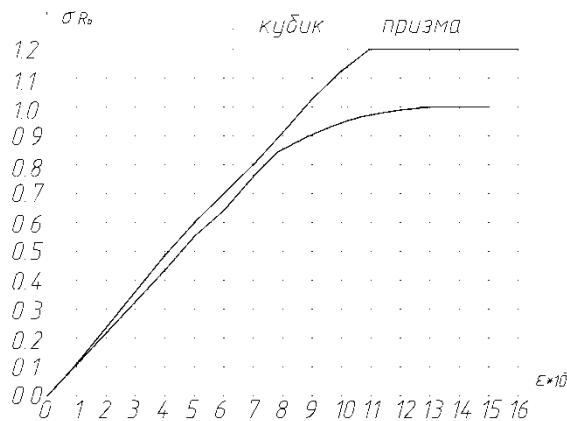


Рисунок 3 – Діаграми деформування бетонної конструкції

Втрата несучої здатності призми відбулася при відносній деформації, рівної  $14,9 \times 10^{-4}$ , втрата несучої здатності куба відбулася при більшій відносній деформації –  $16,2 \times 10^{-4}$ . Розрахунковий опір куба склало 1,2 розрахункові опори призми. За нормами на проектування бетонних конструкцій для бетону розглянутого класу за міцністю указаний коефіцієнт становить 1,3. Отже, норми інтерпретують призмову міцність бетону за даними випробувань куба з більшою обережністю, ніж це треба з результатів чисельних досліджень.

Приклад чисельної реалізації алгоритмів для ущільненої ґрунтової основи. Основні вихідні дані, використані в розрахунку: модуль деформації  $E=5$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu=0.3$ ; кут внутрішнього тертя  $\varphi=30^{\circ}$ ; питоме зчеплення  $c=2$  кПа. Середина ґрунтового масиву прийнята невагомою, тому що напруги від власної ваги ґрунту діють уздовж осі Z.

На першій ступені навантаження до континуальних трикутних елементів прикладене вузлове зосереджене навантаження, що діє в радіальному напрямку і розбите на дві складові:  $N_x$  і  $N_y$ . Початкова величина навантаження і її подальше збільшення в покроковому режимі приймають з урахуванням коефіцієнта наближення до ущільненого стану.

На кожному кроці навантаження визначалися переміщення вузлів розрахункової моделі (формула 2), а також повний тиск, що діє на ґрунтовий масив у цей момент часу. Визначення поточного навантаження провадилося відповідно до формули (5).

Закінченням розрахунку вважалось досягнення граничними шарами масиву ущільненого стану.

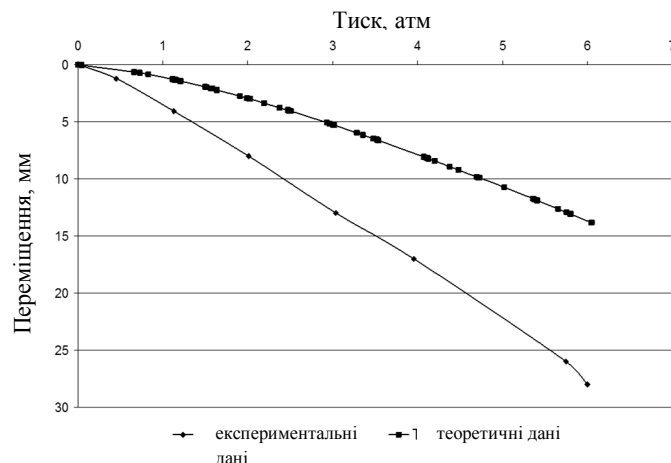


Рисунок 4 – Залежність радіальних переміщень точки від ущільнюючих тисків

Аналіз діаграм переміщень точок ґрунтового масиву, отриманих чисельним та експериментальним шляхом у діапазоні ущільнюючих тисків до 6 ати (рис. 4), показав, що залежність деформацій від напруг в обох випадках носить нелінійний характер. При цьому переміщення, отримані експериментально практично вдвічі перевищують значення, отримані чисельним розрахунком. Це пояснюється складністю одночасного врахування в запропонованій моделі наближення до ущільненого стану (підвищення деформаційних характеристик) і стану пластичної текучості (зниження деформаційних характеристик).

**Висновки.** 1. Нелінійні аспекти деформування бетонної конструкції аж до стадії її руйнування можуть задовільно описуватися з використанням білінійних рівнянь стану, що враховують зміну міцності бетону від рівня середніх напруг відповідно до теорії міцності Кулона –Мора. При цьому не потрібно додаткової вихідної інформації до норм на проектування бетонних конструкцій. 2. Запропонований принцип аналізу

роботи бетонної конструкції може бути розвинено у напрямку врахування роботи бетону по східній гілці. Для цього необхідно діагностувати скінченні елементи за ознакою досягнення в них граничного стиснення. При подальшому навантаженні отпірність зруйнованих елементів у конструкції повинна виключатися, наприклад, методом початкових напруг (додатком у вузлах зруйнованого скінченного елемента як компенсуючих навантаження вузлових реакцій від напруг, досягнутих у ньому в момент руйнування). 3. Застосування загальної теорії міцності можливо як для бетонної конструкції, так і для ґрунтової основи. 4. Методи аналізу граничних станів основ і фундаментів, що ґрунтуються на розв'язанні змішаної задачі теорії пружності і пластичності, у багатьох випадках дозволяють одержувати результати, що задовольняють практику проектування і будівництва будівель і споруд.

#### Література

1. Петраков, А.А. *Применение деформационной теории пластичности для анализа сложных нагружений* / А.А. Петраков // *Строительная механика и расчет сооружений*, 1984. – №2. – С. 13 – 18.
2. Петраков, А.А. *Исследование предельных состояний сооружений на деформируемом основании* / А.А. Петраков // *Современные проблемы строительства*. – Донецк: Донецкий ПромстройНИИпроект, ООО «Лебедь», 1997. – С. 16 – 21.
3. Широков, В.Н. *Теория пластического течения и деформации грунтов при сложном нагружении* / В.Н. Широков // *Основания, фундаменты и механика грунтов*, 1976. – № 3. – С. 33 – 36.
4. Ивлев, Д.Д. *Теория упрочняющегося пластического тела* / Д.Д.Ивлев, Г.И. Быковец. – М.: Наука, 1971. – 231 с.
5. СНиП 2.03.01-84. *Бетонные и железобетонные конструкции* / Госстрой СССР. – М. ЦИТП Госстроя СССР, 1985. – 79 с.
6. Дашевский, Е.М. *Програмный комплекс Полифем для расчета дискретно-континуальных систем. Версия Пк.* / Е.М. Дашевский. – Донецк, Донецкий ПромстройНИИпроект (документация на электронном носителе).
7. Mesci, J. *Densidication and Plastic Behaviour of Soil under Pile Base* / J. Mesci // *Proc. 16-th Int. Conf. on Soil Mech. And Getech. Eng. – Japan*, 2005. – P.1219-1222.
8. Wunderlich, W.W., Gramer H., Findeib R., Steinl G. *Numerical Simulation of Localization Phenomena in Geomechanics by Extended Continuum Formulations* / W.W. Wunderlich, H. Gramer, R. Findeib, G. Steinl // *Error-Controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics/ by Editor E.Stein.* – Willey, West Sussex PO198SQ, England, 2003. – Part 4. – P. 110-146.

Надійшла до редакції 05.10.2012

© О.О. Петраков, Н.О. Петракова, Н.Г. Лобачева