УДК 624.15.001

А.В. Шаповал, к.т.н., доц.
Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАМКАХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОГО УПРУГОПЛАСТИЧНОГО И УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧНОГО ОСНОВАНИЙ

Предложена модификация метода граничных элементов, позволяющая учитывать явление последействия в грунтовом основании, а также его упругие, вязкоупругие и пластические деформации.

Ключевые слова: *метод граничных элементов, вязкоупругая модель, упругопластическая модель, вязкоупругопластическая модель, деформации.*

А.В. Шаповал, к.т.н., доц.
Придніпровська державна академія будівництва і архітектури

ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДА ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ У РАМКАХ МОДЕЛЕЙ В'ЯЗКО-ПРУЖНИХ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ТА ПРУЖНО-В'ЯЗКО-ПЛАСТИЧНИХ ОСНОВ

Запропоновано модифікацію методу граничних елементів, яка дозволяє враховувати явище післядії в ґрунтовій основі, а також її пружні, в'язко-пружні та пластичні деформації.

Ключові слова: *метод граничних елементів, в'язко-пружна модель, пружно-пластична модель, в'язко-пружно-пластична модель, деформації.*

A.V. Shapoval, Dr-Ing.
Prydniprovska State Academy of Architecture and Civil Engineering

FEATURES PERFORMANCE BOUNDARY ELEMENT METHOD IN THE FRAMEWORK OF MODELS VISCOELASTIC, ELASTOPLASTICITY AND VISCOUSELASTICPLASTIC BASES

Modification of method of scope elements, allowing to take into account the phenomena the creep of the ground skeleton and relaxation of tensions, is offered.

Keywords: *boundary element method, viscoelastic model, elastoplasticity model, viscouselasticplastic model, deformations.*

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными практическими задачами. Метод граничных элементов получил широкое распространение для решения практических задач геомеханики, в том числе механики грунтов и фундаментостроения. При этом в качестве расчетной обычно принимают упругую модель основания [1, 2, 3].

Анализ последних исследований и публикаций, в которых положено начало решению данной проблемы. Решению задач механики грунтов и фундаментостроения методом граничных элементов при учете реологических свойств основания посвящены работы [4, 5, 6]. Однако во всех перечисленных работах рассматриваются либо упрощенные теории ползучести (например, теория старения [7]), либо специфические виды нагрузки на основание (например, постоянная или гармоническая).

Близкая по смыслу к рассмотренной в настоящей работе идея решения задач механики грунтов при учете реологических свойств основания методом граничных элементов в рамках **метода перемещений** изложена в работах [4] и [5].

Выделение ранее не решенных частей общей проблемы, которым посвящена данная статья. В данном случае задача исследований была сформулирована так. Граница основания разбита на n граничных элементов, в пределах каждого из которых приложена не зависящая от координат нагрузка, которая является функцией времени.

Взаимосвязь между осадкой некоторой точки основания и приложенной к нему нагрузкой описывается с использованием интегральных уравнений Вольтерра второго рода [8, 9], которые позволяют учитывать одновременно упругие, вязкоупругие и пластические деформации основания [10]. Требуется с использованием техники метода граничных элементов определить напряженно-деформированное состояние основания. Для этой цели следует использовать метод сил.

Цель работы – разработка и обоснование алгоритма определения напряженно-деформированного состояния основания, обладающего реологиических свойствами, методом граничных элементов с использованием техники метода сил.

Изложение основного материала исследования. Согласно [1] каноническая система уравнений метода граничных элементов имеет вид

$$\left|B_{ij}\right| \cdot \vec{q}_i = \vec{S}_i , \tag{1}$$

где B_{ij} – коэффициенты влияния матрицы податливости метода граничных элементов; $\vec{q}_i$ – вектор действующих в пределах каждого из граничных элементов распределенных нагрузок; $\vec{S}_i$ – вектор осадок центров граничных элементов.

Допустим, что квадратная матрица $\left|B_{ij}\right|$ имеет порядок n. Тогда в развернутом виде для i-той строки имеем уравнение вида

$$B_{i1} \cdot q_1 + B_{i2} \cdot q_2 + B_{i3} \cdot q_3 + ... + B_{in} \cdot q_n = S_i , \tag{2}$$

где 1, 2, 3,..., n – номера столбцов, а i – номер строки.

Система уравнений (1) описывает свойства упругого основания. Для одновременного учета упругих, вязкоупругих и пластичных свойств основания используем принцип Вольтерра, суть которого заключается в замене упругих материальных констант некоторыми интегральными операторами (суть и физический смысл этих операторов будут изложены ниже) [11]. При этом для общности изложения материала положим, что действующие в пределах каждого из граничных элементов напряжения зависят от времени. Имеем

$$\left|\tilde{B}_{ij}\right| \cdot \vec{q}_i\left(t\right) = \vec{S}_i\left(t\right) . \tag{3}$$

Здесь $\tilde{B}_{ij}$ – элемент матрицы податливости метода граничных элементов, который является не константой, а интегральным оператором [10]; $\vec{q}_i\left(t\right)$ – вектор действующих в пределах каждого из граничных элементов распределенных нагрузок в момент времени t; $\vec{S}_i\left(t\right)$ – вектор осадок центров граничных элементов в момент времени t.

Допустим, что квадратная матрица $\left|\tilde{B}_{ij}\right|$ имеет порядок n. Тогда в развернутом виде для i-той строки имеем уравнение вида

$$\left.\begin{cases} B_{i1}^{y}\cdot\left[q_1(t)+\int\limits_0^t K_{i1}(t,\tau)\cdot q_1(\tau)\cdot d\tau\right]+ \\ +B_{i2}\cdot\left[q_2(t)+\int\limits_0^t K_{i2}(t,\tau)\cdot q_2(\tau)\cdot d\tau\right]+ \\ +B_{i3}\cdot\left[q_3(t)+\int\limits_0^t K_{i3}(t,\tau)\cdot q_3(\tau)\cdot d\tau\right]+ \\ +....+B_{in}\cdot\left[q_n(t)+\int\limits_0^t K_{in}(t,\tau)\cdot q_n(\tau)\cdot d\tau\right] \end{cases}\right\} = S_i(t), \tag{4}$$

где $B_{i1}^y, B_{i2}^y, B_{i3}^y, ..., B_{in}^y$ – коэффициенты влияния матрицы податливости метода граничных элементов, описывающие упругие деформации основания; $q_{i1}(t), q_{i2}(t), q_{i3}(t), ..., q_{in}(t)$ – действующие в пределах каждого из n граничных элементов распределенные нагрузки в момент времени t; $q_{i1}(\tau), q_{i2}(\tau), q_{i3}(\tau), ..., q_{in}(\tau)$ – то же, в момент времени τ; $K_{i1}(t,\tau), K_{i2}(t,\tau), K_{i3}(t,\tau), ..., K_{in}(t,\tau)$ – ядра ползучести, описывающие вязкоупругие и пластичные свойства основания; $S_i(t)$ – осадка центра i-того граничного элемента в момент времени t; τ – имеющий размерность времени параметр.

Здесь

$$K_{ij}(t,\tau) = K_{ij}^{*}(t-\tau) + K_{ij}^{**}(\tau), \tag{5}$$

где $K_{ij}^{*}(t-\tau)$ – часть ядра ползучести, описывающая вязкоупругие деформации основания; $K_{ij}^{**}(\tau)$ – часть ядра ползучести, описывающая необратимые (т.е. пластичные) деформации основания.

Далее проанализируем систему (3). Если принять в ней, что $K_{ij}(t,\tau)=0$, тогда мы придем к системе уравнений метода граничных элементов, описывающей свойства упругого основания, т.е. (1). Если принять, что $K_{ij}(t,\tau) = K_{ij}^{*}(t-\tau)$, то система уравнений (3) будет описывать вязкоупругие свойства основания, т.е. полностью восстанавливающиеся после разгрузки упругие и запаздывающие во времени полностью восстанавливающиеся после разгрузки вязкие деформации грунта. Наконец, если принять $K_{ij}(t,\tau) = K_{ij}^{**}(\tau)$, то система уравнений (3) будет описывать вязкопластичные свойства основания, т.е. полностью восстанавливающиеся после разгрузки упругие и запаздывающие во времени полностью необратимые после разгрузки пластические деформации грунта.

В заключение отметим, что методики определения операторов $\tilde{B}_{ij}$ для ряда расчетных схем грунтовых оснований (например, полупространства или слоя конечной толщины) изложены в работах [4, 6, 10, 12].

Далее выявим круг задач, которые позволяет решать система уравнений (3).

1. В ряде случаев приложенные к основанию нагрузки известны заранее. Это обычно происходит, если при проектировании используется т.н. схема раздельного расчета [13, 14]. В этом случае использование системы уравнений (3) для определения осадок $S_i(t)$ сводится к вычислению интегралов (4) известными методами [9] и не составляет труда.

2. Заранее известны осадки центров граничных элементов. Необходимо определить действующие в пределах каждого из граничных элементов давления $q_i(t)$. Такая задача возникает, например, при определении контактных напряжений.

Далее рассмотрим вопрос существования решения системы уравнений (3). Представим ее в виде

$$\left|B_{ij}^{y}\right| \cdot \vec{q}_i(t) = \vec{S}_i(t) - \left|\tilde{K}_{ij}\right| \cdot \vec{q}_i(t). \tag{6}$$

Запись $\left|\tilde{K}_{ij}\right| \cdot \vec{q}_i(t)$ в развернутой форме имеет вид

$$\left|\tilde{K}_{ij}\right| \cdot \vec{q}_i(t) = \begin{vmatrix} \int_0^t K_{11}(t,\tau)\cdot q_1(\tau)\cdot d\tau + \int_0^t K_{12}(t,\tau)\cdot q_2(\tau)\cdot d\tau + \ldots + \int_0^t K_{1n}(t,\tau)\cdot q_n(\tau)\cdot d\tau \\ \int_0^t K_{21}(t,\tau)\cdot q_1(\tau)\cdot d\tau + \int_0^t K_{22}(t,\tau)\cdot q_2(\tau)\cdot d\tau + \ldots + \int_0^t K_{2n}(t,\tau)\cdot q_n(\tau)\cdot d\tau \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int_0^t K_{n1}(t,\tau)\cdot q_1(\tau)\cdot d\tau + \int_0^t K_{n2}(t,\tau)\cdot q_2(\tau)\cdot d\tau + \ldots + \int_0^t K_{nn}(t,\tau)\cdot q_n(\tau)\cdot d\tau \end{vmatrix}.$$

Далее умножим (6) справа на матрицу $\left|B_{ij}^{y}\right|^{-1}$. Имеем

$$\vec{q}_i(t) = \left|B_{ij}^{y}\right|^{-1} \cdot \vec{S}_i(t) - \left|B_{ij}^{y}\right|^{-1} \cdot \left|\tilde{K}_{ij}\right| \cdot \vec{q}_i(t). \tag{7}$$

Далее обозначим

$$\vec{q}_i^{\,0}(t) = \left|B_{ij}^{y}\right|^{-1} \cdot \vec{S}_i(t) \tag{8}$$

и

$$\left|\tilde{K}_{ij}^{p}\right| = \left|B_{ij}^{y}\right|^{-1} \cdot \left|\tilde{K}_{ij}\right|. \tag{9}$$

В этом случае система уравнений (6) примет вид

$$\vec{q}_i(t) = q_i^0(t) - \left|\tilde{K}_{ij}^{p}\right| \cdot \vec{q}_i(t), \tag{10}$$

где $q_i^0(t)$ – давления, соответствующие решению задачи в упругой постановке (т.е. при $K_{ij}(t,\tau) = 0$).

Далее для решения системы уравнений (10) используем процесс итерации [15]. Имеем

$$\vec{q}_i^{\,k}(t) = q_i^0(t) - \left|\tilde{K}_{ij}^{p}\right| \cdot \vec{q}_i^{\,k-1}(t). \tag{11}$$

Здесь k – номер приближения.

Имеет место такая теорема. Если справедливо неравенство $\max\left|K_{ij}^{p}(t,\tau)\right| \le m_{ij}$, где $m_{ij} < \infty$ – некоторое положительное число, а количество граничных элементов $n < \infty$, то процесс итерации (11) сходится (следовательно, система уравнений (3) имеет решение) для любого момента времени $t < \infty$.

Доказательство.

В первом приближении имеем $\vec{q}_i^{\,1}(t) = q_i^0(t)$.

Во втором приближении имеем $\vec{q}_i^{\,2}(t) = q_i^0(t) - \left|\tilde{K}_{ij}^{p}\right| \cdot \vec{q}_i^{\,0}(t)$.

В третьем приближении имеем

$$\vec{q}_i^{\,3}(t) = q_i^0(t) - \left|\tilde{K}_{ij}^{p}\right| \cdot \vec{q}_i^{\,2}(t) = q_i^0(t) - \left|\tilde{K}_{ij}^{p}\right| \cdot \vec{q}_i^{\,0}(t) + \left|\tilde{K}_{ij}^{p}\right| \cdot \left|\tilde{K}_{ij}^{p}\right| \cdot \vec{q}_i^{\,0}(t).$$

По индукции для k-того приближения имеем

$$\vec{q}_i^{\,k}(t) = \left\{ E + \sum_{k=1}^{kk} (-1)^{k-1} \cdot \left[\tilde{K}_{ij}^{p} \right]^{k-1} \right\} \cdot \vec{q}_i^{\,0}(t).$$

Здесь $\vec{q}_i^{\,k}(t)$ – вектор искомых напряжений, а E – единичная матрица [15].

Далее положим, что какая-либо из канонических норм матрицы $\left|m_{ij}\right| = M < \infty$. Имеем такие оценки модуля остаточного члена $\left\| \left[\tilde{K}_{ij}^{p} \right]^{k-1} \right\|$: для второго приближения $\left|\tilde{K}_{ij}^{p}\right| \le \frac{M \cdot t}{1!}$; для третьего приближения $\left|\tilde{K}_{ij}^{p}\right| \cdot \left|\tilde{K}_{ij}^{p}\right| \le \frac{M \cdot t^2}{2!}$; для n- го приближения $\left|\tilde{K}_{ij}^{p}\right|^{n-1} \le \frac{M \cdot t^{k-1}}{(k-1)!}$.

Перейдя к бесконечности, найдем $\lim\limits_{k \to \infty} \left[\frac{M \cdot t^{k-1}}{(k-1)!} \right] = 0$. Теорема доказана.

Изложенные в данной статье материалы исследований позволили нам сделать такие **выводы**.

1. Задача определения напряженно-деформированного состояния упруговязкопластичных оснований с использованием метода граничных элементов и техники метода сил имеет решение.

2. Для построения напряженно-деформированного состояния вполне может быть использован процесс итерации.

Литература

1. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.

2. Моргун, А.С. Расчет напряженно-деформированного состояния оснований свайных фундаментов методом граничных элементов: автореф. дис. / А.С. Моргун – Киев, 2005. – 50 с.

3. Шаповал, А.В. К определению граничных элементов в рамках модели упругого грунтового слоя / А.В. Шаповал, А.С. Головко, Е.С. Титякова // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво)/ Полтавський національний техн. університет ім. Ю. Кондратюка. – Вип. 3 (25), т.3. – Полтава: ПолтНТУ, 2009. – С. 221–227.

4. Шаповал, А.В. Особливості взаємодії водонасичених основ, що мають властивість повзучості, з будинками і спорудами: автореферат дис. / А.В. Шаповал. – Д.: ПДАБА, 2007. – 24 с.

5. Шаповал, А.В. Алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния обладающих свойством ползучести водонасыщенных грунтовых оснований методом граничных элементов / А.В. Шаповал // Будівельні конструкції: міжвідомчий науково-технічний збірник. – Вип. 65. – К.: НДІБК, 2006. – С. 305 – 310.

6. Шаповал, В.Г. Особенности взаимодействия весомого водонасыщенного основания с расположенными на нем зданиями и сооружениями: монографія / В.Г. Шаповал, П.Н. Нажа, А.В. Шаповал. – Днепропетровск: Пороги, 2010. – 251 с.

7. Зарецкий, Ю.К. Теория консолидации грунтов / Ю.К. Зарецкий. – М.: Наука, 1967. – 270 с.

8. Вольтерра, В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

9. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 840 с.

10. Шаповал, А.В. Теория взаимосвязанной фильтрационной консолидации: монография / А.В. Шаповал, В.Г. Шаповал. – Днепропетровск: Пороги, 2009. – 311 с.

11. Савин, Г.Н. О применимости принципа Вольтерра. Механика деформируемых тел и конструкций / Г.Н. Савин, Н.И. Рушицкий. – М.: Машиностроение, 1975. – С. 431 – 436.

12. Шаповал, А.В. Метод граничных элементов в задачах определения НДС водонасыщенных грунтовых оснований, обладающих свойством ползучести / А.В. Шаповал, В.Г. Шаповал, В.В. Капустин // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. акад. В. Лазаряна. – Вип.14. – Дніпропетровськ: ДНУЗТ, 2007. – С. 220–224.

13. Механика грунтов: учебник / Шаповал В.Г., Шаповал А.В., Моркляник Б.В., Андреев В.С. – Днепропетровск: Пороги, 2010 – 168 с.

14. Механика грунтов, основания и фундаменты: учебник. / Ухов С.Б. и др.: – М.: Изд. АСВ, 1994. – 527 с.

15. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.

Надійшла до редакції 28.09.2012